Schede storiche

Schede storiche sulle principali tappe dell'evoluzione del pensiero matematico.

Integrazione al curricolo di Matematica

1. BASI NUMERICHE E SISTEMI DI NUMERAZIONE.

Quando noi pensiamo ai numeri, li associamo ai nomi che gli abbiamo dato. Nel fare ciò utilizziamo, senza rendercene conto, uno dei tanti possibili sistemi di numerazione che nel corso della storia sono stati ideati per rappresentare i numeri: il sistema decimale. Infatti i nomi dei numeri, in italiano così come in gran parte delle lingue moderne, portano il segno del dieci. Già i nomi della seconda decina (undici, dodici, tredici, ...) ci dicono che dobbiamo aggiungere delle unità al dieci, ma in modo ancora più evidente i nomi delle decine (a parte il venti che ha una storia particolare) sono costruiti a partire da quelli delle unità corrispondenti (quaranta da quattro, settanta da sette, ...). Sono invece le potenze di dieci che, essendo gli elementi di base, hanno nomi non riconducibili a quelli che li precedono: cento, mille, milione, miliardo.

L'abitudine a parlare di numeri in italiano ci porta a dare per scontato il sistema di numerazione decimale. Molte lingue antiche o primitive, e alcune espressioni delle lingue moderne, ci dicono che l'uomo ha utilizzato nel corso della storia sistemi di numerazione diversi e che quello decimale è una invenzione «abbastanza» recente.

1.1 Un sistema molto semplice: uno, due, molti

Per cominciare bisogna dire che non tutte le culture hanno sviluppato sistemi numerici come il nostro. Ancora oggi esistono tribù che, non avendo la necessità di contare con precisione gli elementi di insiemi numerosi, designano con un generico «molti» le quantità che superano un certo limite. Popolazioni indigene del Mato Grosso hanno solo i concetti di uno, due e molti, i papua della Nuova Guinea arrivano a contare fino a 22 utilizzando come nome di ciascun numero quello di una parte del corpo umano e tribù australiane contano solo fino a 6 utilizzando un sistema binario.

1.2 Tanti modi di contare con le dita

Fu nelle popolazioni più evolute che la pratica di contare con le dita determinò la nascita dei diversi sistemi di numerazione. La base dieci, infatti, è legata solo a un particolare uso delle dita per contare: quello di associare un'unità a ciascun dito delle due mani. La diffusione del sistema di numerazione in base quattro, per esempio presso gli antichi traci e in India nordoccidentale, era legato invece all'usanza di contare toccandosi con il pollice la punta delle altre dita della mano, oppure di servirsi non delle dita ma degli spazi tra esse (in alcune tribù della California). Origine simile alla base quattro potrebbe avere la base dodici, legata a una pratica ancora esistente in Medio Oriente di contare toccandosi con il pollice non le dita ma i polpastrelli. Della base dodici restano numerose tracce nelle nostre tradizioni e nella nostra lingua: alcuni prodotti vengono infatti ancora oggi venduti a «dozzine» (per esempio le uova e le ostriche), la giornata è divisa in 24 ore, dodici diurne e dodici notturne e alcune vecchie unità di misura agricole sono divise in dodici parti.

1.3 I sistemi di numerazione più diffusi

I sistemi più diffusi sono comunque stati quelli a base 5, 10 e 20 le cui origini sono facilmente immaginabili. Spesso però le basi 10 e 20 erano a loro volta legate al 5, come può testimoniare il sistema di numerazione dei maya sviluppato verso il IV secolo a.C., che aveva come simboli lo zero, l'uno e appunto il 5. Tale sistema, molto evoluto, era contemporaneamente additivo e posizionale e comprendeva lo zero che in

Occidente sarebbe apparso dopo quasi 2000 anni. Del sistema vigesimale (in base venti) resta traccia nel francese «quatrevingts» (ottanta: quattro volte venti) e nell'inglese sportivo «two, three scores» (quaranta, sessanta; score significa venti).

1.4 La numerazione sessagesimale

Un sistema di numerazione che ha lasciato tracce significative è quello sessagesimale (base sessanta), di origine antichissima e molto incerta. Potrebbe essere il frutto della sovrapposizione dei sistemi quinario (base cinque) e duodecimale (base dodici): con una mano si contano le unità fino a dodici toccandosi con il pollice i polpastrelli delle altre dita, mentre con le dita dell'altra mano si tiene il conto delle dozzine già contate, così che le 5 dita insieme rappresentino 60 unità.
Il sistema sessagesimale è stato a lungo utilizzato e ancora oggi rimane nella suddivisione delle ore in minuti e dei minuti in secondi e nella misurazione degli angoli.

2. I NUMERI IRRAZIONALI

I numeri irrazionali sono numeri che non possono essere espressi, come succede per i numeri razionali, sotto forma di frazione. La scoperta che all'interno della geometria i numeri interi e i loro rapporti (e quindi le frazioni) non sono sufficienti per spiegare alcune proprietà fondamentali (per esempio il rapporto tra la diagonale di un quadrato e il suo lato) venne probabilmente fatta dai pitagorici prima del V secolo a.C. Tale scoperta deve aver sconvolto la fede pitagorica nei numeri interi e la leggenda vuole che Ipparso di Crotone, avendola resa pubblica, fosse stato punito dagli dei, che lo fecero morire in un naufragio.

2.1 Grandezze incommensurabili

La scoperta dei numeri irrazionali è legata senza dubbio a quella delle grandezze incommensurabili. Se decidiamo di misurare, il perimetro di un quadrato prendendo come unità di misura il suo lato, il risultato che si ottiene è 4; se invece proviamo a misurare, con il lato o anche con un suo sottomultiplo, la diagonale del quadrato ci accorgiamo di non poterlo fare e diciamo quindi che lato e diagonale del quadrato sono tra loro incommensurabili (non misurabili tra loro). Si ritiene che la scoperta dei segmenti incommensurabili sia stata fatta applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele, e quindi proprio al calcolo della diagonale del quadrato. Ma l'incommensurabilità è visibile anche in altri antichi problemi: il rapporto tra la diagonale e un lato di un pentagono regolare non è razionale, così come non lo è il rapporto tra la diagonale del cubo e il suo spigolo. Questi problemi geometrici portarono alla scoperta dei primi numeri irrazionali: che sono, rispettivamente, la «radice quadrata» di 2 (rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato), la «radice quadrata» di 5 (il rapporto tra il lato di un pentagono regolare e la sua diagonale è pari alla «radice quadrata» di 5, meno 1, il tutto diviso due) e la «radice quadrata» di 3 (rapporto tra la diagonale e lo spigolo del cubo). Queste radici non possono essere scritte come frazioni, e naturalmente non sono numeri interi, eppure sul fatto che fossero dei numeri, per quanto strani, nessuno aveva alcun dubbio. In effetti perché se una delle due misure può essere espressa attraverso un numero non può esserlo anche l'altra?

2.2 I nomi degli irrazionali

Gli aggettivi con i quali i numeri irrazionali vennero qualificati nel corso della storia, mostrano nel modo più esplicito le difficoltà che anche i più grandi matematici hanno incontrato nella loro interpretazione e nel loro utilizzo. I greci li chiamavano alogon (che significa nello stesso tempo «inesprimibile» e «privo di ragione»), mentre il matematico arabo Al-Khwarizmi (IX secolo, inventore dell'algebra) si riferiva ai numeri irrazionali chiamandoli gidhr assam, che significa radice muta o cieca (gidhr significava tanto radice di un numero quanto soluzione di un'equazione). Nel XII secolo la parola assam venne tradotta con la parola latina surdus (sordo), cosicché i numeri irrazionali vennero chiamati «sordi» fino al XVIII secolo.

2.3 Un irrazionale diverso: *il pi greco*

Esistono diversi tipi di numeri irrazionali: quelli che scoprirono i greci, che vengono oggi detti irrazionali algebrici, hanno la caratteristica di poter essere costruiti con la riga e il compasso (come tutta la matematica greca) ed espressi come radici di numeri interi. Altri numeri irrazionali detti trascendenti, invece, non possono nemmeno essere scritti con l'aiuto delle radici né costruiti con riga e compasso: è il caso di uno dei più famosi numeri di tutta la matematica, il π. Come è noto questo numero esprime il rapporto tra la misura della circonferenza e quella di un suo diametro. Nel corso dei millenni tutti i popoli si sono cimentati con la ricerca del valore corretto di tale numero. Gli egizi e i babilonesi davano per π i valori $3+\frac{1}{6}$ e $3+\frac{1}{8}$ rispettivamente, e Archimede migliorò tali stime con un procedimento di approssimazione dimostrando che π è compreso tra 3+

$\frac{10}{71}$ e $3+\frac{10}{70}$. I matematici cinesi del V secolo davano 3,1415926 come approssimazione per difetto e 3,1415927 per eccesso. Oggi grazie all'uso dei calcolatori conosciamo un miliardo di cifre decimali di nt, eppure la ricerca non è finita, e mai potrà esserlo!

3. LE FRAZIONI

Pur non essendo antiche quanto i numeri naturali, le frazioni fecero la loro comparsa nel panorama matematico in tempi assai remoti, quando il commercio e gli scambi diventarono fenomeni rilevanti. L'origine delle frazioni è infatti legata a quella delle unità di misura e alla conseguente necessità di una loro suddivisione. Presso gli antichi, tuttavia, le frazioni avevano forme diverse da quelle alle quali noi siamo oggi abituati: avendo infatti una funzione soprattutto pratica, ciascun popolo utilizzava solo quelle frazioni necessarie alle proprie esigenze di misurazione.

3.1 Le frazioni degli egizi

La civiltà che elaborò un sistema frazionario tra i più evoluti fu quella degli antichi egizi. In un papiro che risale al 1650 a.C. (probabilmente copiato da un originale più antico di due secoli) tale sistema viene descritto nei dettagli. Le frazioni egiziane erano solo unitarie: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, ecc. con la sola eccezione di $\frac{2}{3}$ che per la sua ricorrenza aveva un simbolo speciale. Gli egizi avevano quindi compreso l'utilità di suddividere una unità in più parti, e rappresentavano frazioni più generali (quelle con numeratore diverso da uno) come somma di frazioni unitarie: così per esprimere la frazione $\frac{2}{7}$ avrebbero scritto (naturalmente nelle loro notazioni) $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$.

3.2 L'occhio di Horus

Un'importanza particolare ebbero per gli egizi le frazioni aventi per denominatore le potenze successive di due. Queste frazioni sono, di fatto, le più naturali perché si ottengono dividendo l'unità originaria in due, quella così ottenuta ancora in due e così via, secondo un'abitudine ancora radicata nel nostro modo di ragionare: si compra un litro e mezzo di latte, non $\frac{3}{2}$ litri! Per questo tipo di frazioni gli egizi disponevano di simboli particolari, che assemblati opportunamente rappresentavano l'occhio di Horus, contemporaneamente umano e di falco. L'occhio di Horus è dunque diviso in parti che rappresentano metà successive dell'unità. Una parte della cornea indica $\frac{1}{2}$, la cornea $\frac{1}{4}$ il sopracciglio $\frac{1}{8}$, l'altra parte della cornea $\frac{1}{16}$ e i due segni caratteristici della parte inferiore dell'occhio del falco pellegrino indicano le frazioni $\frac{1}{32}$ e $\frac{1}{64}$.

Sommando le varie parti si ottiene: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{32+16+8+4+2+1}{64} = \frac{63}{64}$

Il fatto che questa somma non dia l'unità è legato a una leggenda, secondo la quale la parte rimanente sarebbe stata data dal dio Thot, al contabile che si fosse affidato alla sua protezione. In tale modo veniva quindi fissato il compenso spettante al contabile per il suo lavoro, pari a un sessantaquattresimo della somma totale trattata.

3.3 I babilonesi e le frazioni sessagesimali

Anche i babilonesi si servirono di un elaborato sistema di frazioni. Al contrario degli egizi, però, essi utilizzavano molti numeratori ma pochi denominatori, solo il 60 e alcuni suoi multipli. Per quanto possa sembrare limitato, questo sistema era, per gli scopi di quel periodo, del tutto sufficiente e funzionale: i babilonesi, popolo di astronomi, si servivano infatti di unità di misura per il tempo, il cerchio e gli angoli coerenti con la base di questo sistema e coerenti fra loro. La funzionalità di questo sistema fu riconosciuta dagli astronomi delle epoche successive che tramandarono l'uso del sistema sessagesimale fino ai nostri giorni. I romani si servirono di frazioni aventi come denominatore dodici o un suo multiplo (frazioni duodecimali), per il fatto che la giornata veniva divisa in dodici ore. Un metodo grafico di rappresentazione delle frazioni simile a quello attualmente utilizzato fu introdotto da un matematico indiano del VII secolo (Brahmagupta): consisteva nel sovrapporre alla cifra del denominatore quella del numeratore. La linea di frazione venne introdotta inizialmente dagli arabi; in Europa sostituì la lettera «f» (che abbreviava la parola latina «fractus», ossia diviso, rotto, spezzato) nel Medioevo.

4. IL CONCETTO DI INFINITO

«Infinito» è, letteralmente, una parola derivante dalla negazione di un concetto: è infinito qualcosa che non ha fine, che non ha limiti. Dal momento che i nostri sensi percepiscono sempre dei limiti (temporali: giorni, mesi, anni, durata della vita; spaziali: oggetti, territori), il concetto di infinito, di illimitato, non può che nascere dall'immaginazione, dal pensiero: è una questione «concettuale».

4.1 L'infinito e i numeri grandi

Il concetto di infinito, per quanto non sia direttamente derivato da un'esperienza concreta, e quindi non possa essere considerato né evidente né banale, riesce tuttavia facilmente intuibile: non appena si impara a contare ci si rende conto che, se si volesse, si potrebbe andare avanti senza mai fermarsi.

Della differenza tra un numero molto grande e l'infinito era ben consapevole Archimede (scienziato greco del III secolo a.C.) che discusse su questo argomento con Gerone, re di Siracusa: «Molte persone pensano, o Gerone, che il numero dei granelli di sabbia sparsi su tutti i territori, abitati o inabitati, della Terra sia infinito; altre persone, per quanto non ritengano questo numero infinito, pensano che non li si possa numerare. Ma io proverò a mostrare il contrario, attraverso dimostrazioni irrecusabili, e che, grazie ai numeri che ho denominati, si può sapere non soltanto il numero di granelli di sabbia che possono riempire tutta la Terra, livellando tutte le sue cavità fino alle più alte montagne, ma anche la massa di sabbia uguale in volume all'intero Universo» (che allora si pensava fosse una sfera). La dimostrazione che Archimede fornì a Gerone consisteva nel dividere il volume dell'Universo per quello di un granello di sabbia. Così si otteneva il numero di granelli di sabbia in grado di riempire l'Universo: un numero che era sì molto grande, ma che non era infinito.

Quanti sono i numeri pari?

Galileo Galilei diede un importante contributo alla comprensione «matematica» del concetto di infinito, pur sostenendo che le entità infinite ci riescono incomprensibili a causa della «finitezza» del nostro intelletto.

Si accorse infatti che il numero dei quadrati dei numeri naturali non può essere inferiore a quello dei numeri stessi, dal momento che gli elementi di queste due successioni di numeri possono essere messi in corrispondenza biunivoca (a ciascun elemento di una è possibile associare uno e un solo elemento dell'altra):

1 2 3 4 5 …... n

1 4 9 16 25 ... n^2

Galileo veniva in questo modo a trovarsi di fronte a una proprietà tanto fondamentale quanto stupefacente degli insiemi infiniti: una parte di un insieme infinito può contenere un numero di elementi uguale al numero degli elementi dell'intero insieme (come N e l'insieme dei quadrati perfetti). Eppure non trasse, dal suo ragionamento, questa conclusione; si limitò invece ad affermare che l'insieme dei quadrati perfetti contiene un numero di elementi non inferiore a quello dell'insieme dei naturali. Sull'onda dell'osservazione di Galileo possiamo porci una domanda: sono di più i numeri naturali o i numeri pari? La prima risposta che viene in mente è che sono di più i naturali, invece riflettendo più attentamente possiamo notare che a ogni numero pari si può far corrispondere un numero naturale (dividendolo per due) e a ogni naturale un numero pari (raddoppiandolo); i pari e i naturali sono quindi in corrispondenza biunivoca e hanno perciò la stessa infinita cardinalità.

4.2 Il primo matematico che non aveva paura dell'infinito

Il matematico che più di ogni altro si dedicò all'infinito fu Georg Cantor (18451918): si dice che la storia propriamente matematica dell'infinito sia cominciata con lui. Le idee esposte da Cantor apparirono folli ai suoi contemporanei, che lo investirono, per questo, di forti critiche e, quasi, lo resero oggetto di persecuzioni. Fu invece Hilbert, matematico vissuto tra il 1862 e il 1943, a salutare la teoria di Cantor come «il prodotto più stupefacente del pensiero matematico, una delle più belle creazioni dell'attività umana nel campo del puro intelligibile». Egli era talmente affascinato dagli infiniti che Cantor aveva costruito da esclamare: «Nessuno ci scaccerà mai dal paradiso che Cantor ha creato per noi».

5. GLI ANGOLI E LA LORO MISURA

La storia del concetto di angolo è, se possibile, ancora più complicata di quella degli altri enti geometrici. Per comprendere le difficoltà che ne hanno segnato il processo di formalizzazione è interessante risalire ad alcune delle definizioni che nel corso dei secoli sono state date di questo ente geometrico. Apollonio (matematico greco del III secolo a.C.) definisce l'angolo come «la contrazione in un solo punto di una superficie sotto una linea spezzata», mettendo quindi l'accento sulla porzione di piano compresa al suo interno. Secondo Legendre (matematico francese del XVIII secolo), invece, l'attenzione va posta sullo «scarto» tra due rette: «quando due rette si incontrano, lo scarto più o meno grande tra di esse si chiama angolo». Probabilmente l'angolo, fatto derivare in passato anche dal concetto di inclinazione (che ne è solo una sorta di sinonimo) è, come l'inclinazione, un concetto di cui non si riesce a dare una vera e propria definizione, ossia che non si riesce a ricondurre a un'idea più semplice.

5.1 Gli angoli per i greci e la «definizione» di Euclide

La storia delle definizioni di angolo è stata forse resa tanto travagliata anche dall'ambiguità della definizione di Euclide, il padre della geometria: «un angolo piano è l'inclinazione mutua di due linee che si toccano in un piano e non hanno la stessa direzione»; «quando le linee che comprendono un angolo sono rette, l'angolo si dice retto».

L'«inclinazione mutua» sembra infatti, più che una definizione, un suggerimento, uno spunto per la comprensione della nozione di angolo. Inoltre la distinzione tra linee e linee rette che appare in queste due definizioni può sembrarci un'inutile ripetizione. In realtà i greci dei tempi di Euclide avevano un concetto piuttosto «ampio» di angolo: quello individuato da due rette incidenti era solo un caso molto particolare della molteplicità di situazioni possibili. Gli angoli erano detti curvilinei quando erano determinati da due linee curve, mistilinei quando si intersecavano una retta e una linea curva e infine rettilinei nel caso in cui entrambe le linee fossero rette.

5.2 Una misura che resiste da millenni

Se travagliata è stata la definizione di angolo, non altrettanto si può dire della sua misura: il sistema oggi più comunemente utilizzato infatti, quello sessagesimale, è rimasto immutato fin da tempi antichissimi. Esso consiste nel mettere in corrispondenza l'unità di angolo con un arco pari alla 360esima parte della circonferenza. L'unità di misura così definita prende il nome di grado, dal latino gradus che tradusse nel Medioevo la parola daraja (in arabo gradino, scalino, passo), con la quale gli arabi a loro volta avevano tradotto la parola greca moira (che esprime l'idea della suddivisione del cerchio). L'origine di questa unità di angolo appare così antica da spingere alcuni storici ad avanzare l'ipotesi che l'uomo abbia imparato a misurare le inclinazioni, prima che le lunghezze. Anche la scelta della suddivisione in 360 gradi è misteriosa. Le ipotesi avanzate per spiegarla, per quanto seducenti, non sono purtroppo che congetture, in assenza di alcuna testimonianza certa. Una è che i babilonesi avessero diviso il grande cerchio che il Sole sembra percorrere attorno alla Terra, per il numero dei giorni impiegati a completarlo (e cioè il numero dei giorni di un anno): in tal modo il Sole percorrerebbe quotidianamente un arco corrispondente a un grado di tale traiettoria. In effetti però i babilonesi, che avevano un'astronomia avanzatissima, sapevano perfettamente che la durata di un anno è di 365 giorni, anche se usavano un calendario di soli 360 giorni suddivisi in 12 mesi lunari di 30 giorni ciascuno.

Potrebbero quindi non essere stati i babilonesi gli inventori del grado come unità di misura angolare, e tuttavia c'è il fatto che le due successive suddivisioni del grado e del primo in sessanta parti sembrano trovare giustificazione proprio per il sistema di numerazione a base sessanta che questo popolo adottava. Il mistero sull'origine del grado resta insoluto; a spiegare la sua lunga resistenza può bastare però la sua grande praticità, apprezzata soprattutto da chi con le misure angolari deve lavorare in continuazione, gli astronomi. In effetti il vantaggio della suddivisione dell'angolo giro in 360 gradi è quello di poter rappresentare gli angoli dalle proprietà più interessanti (in particolare gli angoli di 30° e 60°) senza dover ricorrere a frazioni o numeri decimali.

6. IL TEOREMA DI PITAGORA

Il teorema di Pitagora prende il nome dal matematico greco vissuto nel VI secolo a.C. che ne diede la prima celebre dimostrazione. Purtroppo di questa dimostrazione non ci è pervenuta la versione originale, ma a essa hanno fatto riferimento numerosi matematici greci. Tannery, storico della scienza dell'inizio del Novecento, era convinto, sulla base delle conoscenze di geometria all'epoca di Pitagora, che la sua dimostrazione si servisse di triangoli simili. Di diverso avviso era invece Georg Cantor (grande matematico di fine Ottocento), convinto che Pitagora avesse dato del teorema che porta il suo nome solo dimostrazioni di casi particolari (come quello del triangolo rettangolo isoscele, metà del quadrato).
La più antica dimostrazione che ci è pervenuta del teorema di Pitagora è quella che appare nel primo libro degli Elementi di Euclide (IV secolo a.C.), opera che, per oltre due millenni, ha costituito la fonte primaria di conoscenze geometriche nel mondo occidentale.

6.1 I tenditori di corde in Egitto

Le relazioni tra i lati di un triangolo rettangolo erano invece note già in tempi antichissimi: di esse facevano uso i geometri egizi, chiamati per il motivo che vedremo tra breve «tenditori di corde», il cui compito era quello di costruire templi e piramidi, e di delimitare i terreni agricoli periodicamente inondati dalle piene del Nilo. Per far ciò essi avevano infatti bisogno di sapere esattamente come disegnare un angolo retto. Prendendo delle corde suddivise con dei nodi in 12 parti uguali sapevano che, fissando sul terreno il quarto e l'ottavo nodo e tendendo la corda per i due nodi estremi uniti, si otteneva un triangolo rettangolo in corrispondenza del quarto nodo, avente lati pari a 3, 4, 5. Questa terna era sacra agli egizi, non solo perché aveva la funzione di una «squadra», ma anche perché rappresentava, secondo quanto riferisce lo storico greco Plutarco, il simbolo della natura e del suo divenire: ai vertici del triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 stavano infatti, secondo la mitologia, le tre divinità Horus, Osiris e Isis, e la famosa Camera dei re, all'interno della piramide di Cheope (2600-2480 a.C.) fu costruita in modo tale che questo particolare triangolo fosse riprodotto nella sua struttura. Oltre alla terna 3, 4, 5, altre terne numeriche (dette «pitagoriche» che danno luogo a triangoli rettangoli erano note in India e in Cina intorno al V e IV secolo a.C.

Tra le più celebri ricordiamo:

5 12 13

8 15 17

12 16 20

Naturalmente se ne possono identificare molte altre ancora.

6.2 Un problema babilonese

Anche i babilonesi dovevano avere familiarità con le proprietà dei triangoli rettangoli e con le misure dei loro lati: in una
tavoletta risalente al 2000 a.C. si è trovata la soluzione di un curioso problema. Se un bastone lungo 30 unità, inizialmente appoggiato completamente contro un muro, scivola verso il basso di 6 unità, di quante unità il bastone si allontana dalla base del muro? La risposta è la seguente: fai il quadrato di 30 e sottrai a esso il quadrato del numero

ottenuto sottraendo 6 a 30 (24): ciò che ottiene è il quadrato di 18, e quindi 18 è il numero richiesto.

6.3 Le dimostrazioni di Euclide

Le dimostrazioni che nel corso dei secoli sono state date del teorema di Pitagora sono numerosissime. Quasi tutti i popoli che svilupparono una matematica evoluta ne fornirono alcune (sia semplici sia complesse). Euclide, che come abbiamo visto diede la dimostrazione più antica a noi pervenuta, si rese conto però di un fatto molto importante: il teorema di Pitagora è in realtà generalizzabile. Egli si accorse che la proprietà fondamentale dei triangoli rettangoli non è quella che i quadrati costruiti sui lati soddisfano la ben nota proprietà, ma che tale proprietà è soddisfatta dalle aree di tutte le figure simili tra loro, costruite sui lati di un triangolo rettangolo. I quadrati sono evidentemente simili fra loro (tutti i quadrati sono simili), ma lo sono anche i pentagoni regolari, i semicerchi, e, volendo, è possibile trovare le figure più strane che, essendo simili tra loro, soddisfano il teorema di Pitagora generalizzato.

7. L'invenzione dello zero

Una delle invenzioni che ha maggiormente segnato la storia della matematica è stata senza dubbio quella dello zero. Quello che per noi è il primo dei naturali, è stato in realtà l'ultimo a essere accettato e ha faticato molto a essere considerato come un vero numero. La ragione è legata al significato che per molti secoli è stato dato ai numeri: essi rappresentavano solo delle quantità, e per indicare l'assenza di quantità non sembrava utile definire alcun numero. La comparsa dello zero nel mondo matematico non fu infatti provocata dall'esigenza di quantificare l'assenza di oggetti; per fare ciò venivano normalmente utilizzati termini come vuoto, niente o nessuno, e ancora oggi, infatti, diciamo che un cesto è vuoto, o che non contiene niente, e non ci viene certo in mente di dire che contiene zero oggetti.

7.1 I solchi nella sabbia degli indiani

Lo zero comparve in realtà, per la prima volta, esattamente per lo stesso motivo per cui lo utilizziamo ancora oggi: per scrivere più facilmente gli altri numeri e soprattutto per semplificare i calcoli. Il primo zero della storia compare infatti in un'iscrizione indiana dell'876 all'interno di un altro numero, il 270. Gli indiani avevano un sistema di numerazione in base dieci, e per fare i conti rappresentavano i numeri con un metodo simile a quello che noi utilizziamo sul pallottoliere. In una serie di piccoli solchi paralleli, tracciati nella sabbia, inserivano dei sassolini, in modo che il numero dei sassolini contenuti nel solco più a destra indicasse le unità, quello accanto a sinistra le decine, quindi le centinaia e così via. Per rappresentare il numero «due-centosettanta» un indiano avrebbe quindi messo due sassolini nel solco delle centinaia, sette in quello delle decine e nessuno in quello delle unità. Successivamente, invece di tracciare in continuazione solchi nella sabbia, si pensò di rappresentarli simbolicamente in modo che chiunque potesse ricostruire da solo la disposizione dei sassolini nei solchi. Al solco con un sassolino fu assegnato un simbolo, un altro a quello con due sassolini e così via fino a quello con nove sassolini. Tuttavia questo non bastava ancora, serviva un simbolo per il solco vuoto: solo con questo decimo simbolo sarebbe stato possibile ricostruire tutte le possibili disposizioni di sassolini nei solchi (per esempio quella del numero 270). Il decimo simbolo era naturalmente quello dello zero, che gli indiani chiamarono sunja (che significa vuoto) e rappresentarono con un puntino.

7.2 Da dove viene il nome zero?

Gli arabi, nel IX secolo, adottarono la numerazione indiana e tradussero sunja con sifr che significa vuoto. Qualche secolo dopo, in Europa, sifr fu latinizzato in cifra e quindi ancora trasformato in zephirum, zefiro per arrivare infine a zero. Una lenta evoluzione subì anche il simbolo dello zero che dal puntino indiano si trasformò gradualmente nel cerchio un po' allungato che ben conosciamo.

7.3 Lo zero e il sistema di numerazione posizionale

L'importanza fondamentale dello zero consiste nel rendere possibile il sistema di numerazione posizionale, quello che noi usiamo, in cui il valore dei simboli dipende dalla posizione nella quale sono scritti (unità, decine, centinaia, migliaia ecc.). Questo sistema ha il pregio di rendere la scrittura dei numeri sintetica e facilmente leggibile, ma soprattutto consente di semplificare i calcoli. La moltiplicazione era infatti per i romani, che usavano un sistema addizionale, una operazione molto complessa, mentre risulta semplicissima con un sistema come il nostro. Nonostante ciò, come spesso accade per le grandi invenzioni, l'accettazione dello zero e del sistema di numerazione indoarabo fu, in Europa, estremamente lenta e contrastata. Dopo secoli di calcoli realizzati con l'abaco (una specie di pallottoliere), infatti, molti si rifiutarono di imparare il nuovo sistema e si formarono due «fazioni»: gli abacisti, che continuavano a usare le cifre romane e a fare i conti con l'abaco, e gli algoristi, che adottarono le cifre arabe facendo i conti con algoritmi di calcolo (procedimenti) simili a quelli che utilizziamo noi oggi. Fu solo dopo lunghe «battaglie», condotte da alcuni tra i più grandi matematici vissuti tra il XII e il XVI secolo, che il sistema posizionale decimale e le cifre arabe sostituirono la numerazione romana.

8. Cartesio e la geometria analitica

La geometria analitica, definita in passato come «l'applicazione dell'algebra alla teoria delle curve», rappresenta una delle più grandi innovazioni della storia della matematica: il suo grande merito è quello di aver unificato due scienze che, fino ad allora, viaggiavano su binari paralleli senza mai incontrarsi, l'algebra e la geometria. Sorta nel periodo in cui massima era la fiducia nelle capacità della ragione dell'uomo, rappresentò il momento di sintesi di tutto il sapere matematico costruito in secoli di storia.
La sua nascita è strettamente legata al nome di colui che la formalizzò e che ne mostrò la sorprendente potenza ed eleganza: René Descartes (Cartesio), filosofo e matematico francese vissuto nel XVII secolo.

8.1 La tradizione spezzata

Molti matematici dell'epoca, e tra questi i più importanti, vollero tuttavia ridimensionare i meriti di Cartesio. Leibniz, per esempio, sostenne che Cartesio non aveva fatto altro che assemblare teorie di altri: «quelli che sono sufficientemente addentro all'Analisi e alla Geometria, sanno che Cartesio non ha scoperto nulla nell'algebra, essendo la speciosa di Viète (la logistica speciosa era quello che per noi è il calcolo letterale), le soluzioni delle equazioni cubiche e quadrato-quadrate (cioè di quarto grado) di Del Ferro e Ferrari, la genesi delle equazioni dalla molteplicità delle equazioni uguali a nulla essendo di Harriot, e il metodo delle tangenti o dei "maximis" e "minimis" essendo di Fermat, in modo che non gli resta che d'aver applicato le equazioni alle linee della geometria di gradi superiori, che Viète, prevenuto dagli antichi che non le consideravano geometriche a sufficienza, aveva trascurato». Quale fu dunque il merito di Cartesio, visto tra l'altro che anche Fermat (altro matematico francese del XVII secolo) inventò quasi contemporaneamente a lui la geometria analitica (e, secondo alcune testimonianze, sette anni prima), e che dunque questa doveva essere stata, in qualche modo, «nell'aria»? Il fatto è che tanto Viète quanto Fermat restarono, nonostante le loro scoperte, fortemente legati alla «tradizione degli antichi», tradizione di cui invece Cartesio si liberò completamente.

8.2 La sintesi tra due scienze: la geometria analitica

Cartesio ebbe il grande merito di partire dai risultati dei matematici che lo avevano preceduto, senza però diventarne schiavo: comprese che le due scienze matematiche per eccellenza, la geometria e l'algebra, potevano in realtà essere unificate con un unico strumento, in grado di cogliere sia le relazioni tra le figure sia quelle tra quantità numeriche. In questo modo la matematica diventava il linguaggio che meglio poteva esprimere la potenza della ragione umana. Cartesio utilizzò la matematica come un vero e proprio linguaggio, non si interessò ad altro che alle «quantità», dimenticandosi di ciò che esse potevano rappresentare. Fin dai tempi dei matematici greci a ogni numero veniva associato un segmento, al prodotto di due numeri un rettangolo, e un parallelepipedo a un prodotto di tre fattori. Cartesio ruppe con questa tradizione e iniziò a pensare anche ai prodotti e ai risultati di tutte le operazioni come semplici numeri, e a rappresentarli quindi come punti su una retta, rendendo in questo modo meno intuitiva la rappresentazione delle operazioni elementari come il prodotto, ma molto più semplice quella di operazioni complesse come la soluzione delle equazioni, e aprendo la strada all'accettazione delle potenze con esponente maggiore di 3, che fino ad allora venivano considerate prive di senso, perché prive di significato geometrico. Infatti, mentre la seconda potenza di un numero può essere associata all'area di un quadrato di lato assegnato e la terza potenza al volume del cubo corrispondente, che significato geometrico si può attribuire alla quarta potenza? Cartesio si accorse che il punto, ossia l'ente geometrico fondamentale, poteva essere espresso «algebricamente» da una coppia di numeri. In questo modo la retta, che è costituita da un insieme ben definito di punti poteva essere descritta come l'insieme di tutte le coppie di punti che soddisfano una ben determinata equazione. E viceversa! Utilizzando questo procedimento mostrò che tutte le principali curve del piano — rette, parabole, circonferenze, ellissi, e molte altre ancora — possono essere associate a equazioni algebriche e che, viceversa, ogni equazione algebrica può essere «disegnata» su un piano, facilitando l'intuizione e la ricerca delle sue soluzioni.

9. Simboli e i segni

Il vero e proprio sistema di semplificazione del «discorso» matematico costituito dalla grande quantità di simboli e segni utilizzati oggi in algebra e in genere in matematica (destinati a diventare sempre più numerosi, all'aumentare delle scoperte), non esiste da quando l'uomo ha cominciato a parlare di matematica, né, tanto meno, è nato così com'è, ma ha subito una lenta e, sotto certi aspetti, fortuita evoluzione. Questo per la fatica di trovare dei simboli facilmente adottabili da tutti che si potessero sostituire «degnamente» alla matematica parlata. Se solo non fosse troppo pesante alla lettura, oggi un qualunque testo matematico potrebbe essere scritto con il solo ausilio del sistema di segni e simboli universalmente accettati: il linguaggio matematico è diventato un linguaggio universale. Ma veniamo alla storia, e al gran numero di passi che si è dovuto compiere prima di arrivare al sistema di simboli di cui si serve il linguaggio matematico.

9.1 Le cifre nei popoli antichi

I numeri, che oggi scriviamo con cifre inventate in India quasi mille anni fa, sono stati rappresentati in molteplici modi. I babilonesi utilizzavano la cosiddetta scrittura cuneiforme, che disponeva di due soli segni per scrivere tutti i numeri: uno per l'unità e un altro per le decine. Gli egizi utilizzavano sette simboli e i greci tutte le lettere del loro alfabeto. I romani disponevano di sette segni che avevano la proprietà di sommarsi o sottrarsi l'un l'altro secondo l'ordine in cui venivano scritti. Questo utile espediente permise una semplificazione della scrittura dei numeri, anche se non eliminò i problemi derivanti dall'esecuzione delle operazioni meno banali. I primi simboli per le operazioni Altrettanto varie erano le notazioni utilizzate — quando esistevano — per le operazioni. Gli egizi utilizzavano il segno «JJ» (due gambe che camminano verso sinistra) per la somma, e il segno «LL» (due gambe che camminano verso destra), per la differenza. Gli indiani avevano una matematica molto evoluta, e infatti il loro sistema di simboli era piuttosto funzionale: essi scrivevano le frazioni in modo simile al nostro (senza però la linea di frazione), indicavano l'addizione, la divisione e l'uguaglianza con le abbreviazioni delle parole indiane corrispondenti («yu», «bha», «pha»), la moltiplicazione scrivendo i fattori uno di seguito all'altro, e la sottrazione ponendo dopo il sottraendo una croce («+»), proveniente forse da ha, sillaba iniziale della parola kanita che significa «diminuito». Le abbreviazioni e i simboli moderni Un grande passo avanti si verificò quando si cominciarono a utilizzare come simboli abbreviazioni di parole. L'ideatore di questo sistema fu il frate francesca- rtcí Luca acioli (XV secolo), che inventò una sorta di linguaggio «stenografico», fatto di abbreviazioni, numeri e parole. In questo sistema «co» designava l'incognita (abbreviazione del latino «cosa»: l'algebra veniva detta anche «ars cossica», arte della «cosa»), «p» e «m» la somma e la differenza, «ce» il quadrato dell'incognita (dal latino «censo»), «cu» il cubo (da «cubus»), «ce ce» la quarta potenza, e «ae» l'uguale (da «equalis»). Di pochissimo precedente a quella di Pacioli fu l'opera del tedesco J. Widmann, in cui comparvero i segni «+» e «—» per l'addizione e la sottrazione. L'ipotesi è che «+» fosse un segno di abbreviazione della congiunzione latina «et». L'uso di questi due nuovi simboli si estese grazie all'opera di un celebre matematico tedesco del XVI secolo, M. Stifel, e finì piano piano per soppiantare in Francia e in Italia l'uso di «p» e «m», diventando definitivo solo nel XVIII secolo. Il matematico italiano Bombelli e il francese Viète (XVI secolo) diedero altri importanti contributi alla scrittura simbolica: il primo introdusse l'uso delle parentesi, il secondo ebbe invece il grande merito di introdurre per la prima volta i simboli letterali all'interno delle equazioni (usò le vocali per indicare le incognite e le consonanti per i termini noti). Precedente a Viète fu l'introduzione dell'attuale simbolo di uguaglianza: lo si deve all'inglese Recorde, che scrisse: «... e a evitare la tediosa ripetizione delle parole "è uguale a" porrò, come spesso soglio fare, una coppia di parallele, o linee gemelle, di una stessa lunghezza, nel seguente modo: "=", poiché non vi possono essere due cose più uguali».

10. IL CERCHIO

La retta e il cerchio hanno in geometria un ruolo decisamente particolare. Rappresentano il cuore di tutta la geometria classica: sono infatti le uniche linee con le quali i matematici greci, e in particolare Euclide, ritenevano potessero essere realizzate tutte le costruzioni geometriche, dalle più semplici alle più complesse. Possiamo dire che la geometria era per i greci la scienza delle figure che si possono disegnare utilizzando solo la riga (per disegnare le rette) e il compasso (per il cerchio). L'origine di una tale convinzione trova spiegazione non solo nelle proprietà matematiche di queste due figure, ma soprattutto nel significato che la cultura greca attribuiva loro.

10.1 La definizione di Euclide

Proclo, storico greco del V secolo famoso per le sue analisi delle opere di Euclide e Platone, citando la definizione euclidea del cerchio, secondo la quale il cerchio è la figura piana compresa sotto una sola linea, tale che tutte le rette (segmenti) che intersecano tale linea partendo da uno dei punti interni alla figura (il centro) sono uguali tra loro, afferma che «il cerchio è la prima, la più semplice e la più perfetta delle figure». Con queste parole confermava l'importanza filosofica, religiosa e, certamente, matematica del cerchio nella cultura greca.

10.2 Il cerchio nella cultura greca

Le idee di stabilità e di cambiamento erano infatti alla base dei tentativi dei filosofi greci per spiegare il mondo; il fenomeno della generazione, cioè di ciò che ha inizio, cresce e muore si contrappone a ciò che è non generato, non avendo un'origine e non potendo morire. Il cerchio rappresenta quindi per i greci la figura del divino, dato che al contrario della retta (che pure è illimitata), non inizia né finisce. Nella scuola di Pitagora, inoltre, il cerchio rappresentava anche l'idea dell'anima che ritorna sempre uguale a se stessa in corpi differenti, «percorrendo» continuamente un circuito tra cielo e terra che una volta in moto non si arresta mai. Venendo a un ambito più concreto, il cerchio rappresentava la forma del cielo e delle traiettorie (apparenti) degli astri attorno alla Terra. E quando si dovette ammettere che queste traiettorie, se considerate circolari, non rendevano ben conto dei fenomeni celesti osservati, si cercò in tutti i modi di elaborare tesi, anche estremamente ingegnose, che utilizzassero comunque i cerchi. Fu necessario attendere fino al XVII secolo per raccogliere un sufficiente numero di prove e perché si verificassero i mutamenti culturali necessari affinché potesse essere abbandonata, con l'astronomo tedesco Keplero, l'ipotesi di circolarità delle orbite planetarie. Keplero fu infatti in grado di dimostrare che queste sono, in realtà, ellittiche.

10.3 La quadratura del cerchio

La supremazia del cerchio non fu tuttavia solo «celeste»: abbiamo già detto, infatti, che per i greci tutta la geometria era una costruzione di riga e compasso. Tale atteggiamento sta alla base del più che famoso «problema della quadratura del cerchio» che tenne occupati i matematici per oltre duemila anni. Si tratta del tentativo di costruire un quadrato equivalente a un cerchio dato, utilizzando solo la riga e il compasso. Dopo oltre due millenni e mezzo, nel 1882 fu dimostrato finalmente che il problema è insolubile: la riga e il compasso non sono sufficienti per fare la costruzione desiderata.

10.4 Gli strumenti e le regole della geometria

La cosa più importante che possiamo ricavare da questa dimostrazione è che la matematica che studiamo dipende strettamente dagli strumenti che decidiamo di utilizzare: costruire un quadrato equivalente a un cerchio era infatti impossibile per i greci, perché volevano utilizzare solo riga e compasso, mentre non lo è se decidiamo di utilizzare anche altri strumenti. Molti sono stati infatti i procedimenti inventati (anche dagli stessi greci) per risolvere il problema, utilizzando curve non costruibili con riga e compasso; tuttavia, sebbene con questi tentativi si fosse riusciti a quadrare il cerchio, il problema che veniva risolto non era quello originale: la difficoltà stava infatti nelle regole. Cambiando le regole della geometria il problema non è più lo stesso ed è la geometria stessa a diventare un'altra cosa.

11. I POLIEDRI REGOLARI

Tra le figure geometriche dello spazio, i poliedri regolari sono probabilmente quelle più ricche di storia. A esse, e ad alcune loro particolarità, hanno dedicato grande attenzione molti scienziati e filosofi, dall'antichità ai nostri giorni. Un primo fatto che li rende interessanti è che sono solo cinque:

- *il tetraedro, le cui 4 facce sono triangoli equilateri;*

- *l'esaedro o cubo, le cui 6 facce sono quadrati;*
- *l'ottaedro, le cui 8 facce sono triangoli equilateri;*
- *il dodecaedro, le cui 12 facce sono pentagoni regolari;*
- *l'icosaedro, le cui 20 facce sono triangoli equilateri.*

11.1 Un profondo legame

Esiste una interessante proprietà che lega tra loro queste cinque figure. Se si prendono i centri dei poligoni regolari che costituiscono le facce di uno qualunque dei cinque poliedri regolari e li si congiungono tra loro, si ottiene ancora un poliedro regolare. Per esempio congiungendo i centri delle sei facce quadrate di un cubo si ottiene un ottaedro, e reciprocamente, congiungendo i centri degli otto triangoli equilateri che costituiscono le facce di un ottaedro si ottiene un cubo. La stessa cosa succede prendendo la coppia dodecaedro-icosaedro, se si parte invece da un tetraedro il solido che si ottiene è ancora un tetraedro.

11.2 Platone e i poliedri regolari.

L'importanza attribuita a questi solidi dalla cultura greca è testimoniata in modo esemplare da un'importante opera di uno dei massimi filosofi greci, Platone. Si tratta di un dialogo, il Timeo, il cui protagonista vuole spiegare come è costituito e come è nato l'Universo. Gli elementi che compongono tutte le cose che ci circondano sono solo quattro: fuoco, aria, acqua e terra e a ognuno di essi è associato un numero, in modo da formare una proporzione continua: il fuoco sta all'aria come l'aria sta all'acqua e come l'acqua sta alla terra. Questi elementi deriverebbero a loro volta dalla combinazione di due figure geometriche, la metà del triangolo equilatero (il triangolo rettangolo con angoli acuti di 30° e 60°)

e la metà del quadrato (il triangolo rettangolo con angoli acuti di 45°), create da Dio che «li fece il più possibile belli e buoni, traendoli da cose che belle e buone non erano». Questi due triangoli rappresentavano dunque le forme più belle e Dio li scelse per costruire la materia. Con questi triangoli si possono infatti costruire quattro dei cinque solidi regolari, che rappresentano gli «atomi» dei quattro elementi (fuoco, aria, acqua e terra).

Gli atomi della terra, l'elemento più stabile, sono cubi, i solidi con le basi «meglio appoggiate»; quelli del fuoco, l'elemento più mobile, sono tetraedri, i solidi più piccoli e aguzzi; gli atomi dell'acqua sono invece icosaedri; infine gli atomi dell'aria, che è l'elemento che nella proporzione sta tra fuoco e acqua, sono gli ottaedri (8 facce), che come solidi stanno tra i tetraedri (4 facce) e gli icosaedri (20 facce). L'ultimo poliedro, il dodecaedro, avendo facce pentagonali non è riducibile né ai mezzi triangoli equilateri, né ai mezzi quadrati scelti da Platone e non poteva quindi rappresentare un elemento. Tuttavia, per la sua forma prossima alla sfera, Platone lo scelse per rappresentare l'Universo.

11.3 Nell'arte e nella scienza

Nel Rinascimento italiano gli artisti fecero della geometria uno strumento «indispensabile» alla composizione di un'opera d'arte. In questo clima il pittore Piero della Francesca (XV secolo) sostenne, in un trattato sui cinque corpi regolari, che il mondo è pieno di corpi complessi riconducibili ai cinque poliedri regolari, e che questi rappresentano l'eterna perfezione. Un'ulteriore conferma di quale fosse l'importanza di poliedri regolari, anche nella cultura scientifica, ci viene dall'astronomo tedesco Giovanni Keplero, scopritore delle tre leggi che portano il suo nome sul moto dei pianeti attorno al Sole. Egli attribuì ai cinque poliedri la funzione di «regolare» il moto dei pianeti allora conosciuti: Saturno, Giove, Marte, Venere e Mercurio si dovevano muovere su sfere separate l'una dall'altra dai cinque poliedri regolari.

13. Al-Khwarizmi e la nascita dell'algebra

Al jabr e al-mugabala

La parola «algebra» è la traduzione latina della parola araba al-jabr che significa «la riduzione» o anche «la riparazione». Indicava infatti l'arte di rimettere a posto slogature e fratture e passò con questo significato nel termine spagnolo «algebrista», che Cervantes utilizzò nel Don Chisciotte.
Fu il grande matematico arabo AlKhwarizmi, vissuto nel IX secolo, che la fece entrare nel linguaggio della matematica, intitolando uno dei suoi numerosi trattati «Breve opera sul calcolo di al-jabr e di al-muqabala». In questo trattato aljabr indica l'operazione di eliminazione di un termine «da sottrarre» (che oggi diremmo «negativo»), realizzata aggiungendo lo stesso termine ai due membri dell'equazione («riparando la frattura»). Si tratta quindi dell'operazione del trasporto.
Muqabala vuol dire invece «confronto», nel senso di mettere in opposizione, bilanciare, e indica l'operazione di riduzione dei termini simili («da aggiungere», cioè positivi) presenti nei due membri dell'equazione: l'operazione che oggi chiamiamo semplificazione.
Per fare un esempio, data l'equazione:

$x^2+100-20x = 178-40x$

fare un al-jabr significa aggiungere a entrambi i membri 40x, in modo da ottenere:

$x^2 + 100 + 20x = 178$

Una al-muqabala consiste nel ridurre i numeri dello stesso tipo ancora presenti nei due diversi membri, così da ottenere:

$x2 + 20x = 78$

13.1 La classificazione delle equazioni di Al-Khwarizmi

Nelle equazioni che Al-Khwarizmi si proponeva di risolvere, derivanti dai complicati problemi di eredità del diritto islamico, comparivano tre tipi di grandezze:

• i numeri semplici, che lui chiama dirham (termine che deriva forse da dracma, l'unità monetaria greca);

• l'incognita, chiamata gizr (la radice) o chay (la cosa);

• l'incognita al quadrato, chiamata mal (che significa sia il quadrato che l'ammontare di una somma).

Attraverso al-jabr e al-muqabala, AlKhwarizmi mostrò, senza usare alcun formalismo matematico (non si serviva cioè di formule ma solo di «parole»), che tutti i problemi (le equazioni) costruiti con le tre grandezze descritte possono essere ricondotti a una delle sei forme seguenti:

1. dei quadrati uguali a delle radici: $ax^2 = bx$

2. dei quadrati uguali a un numero: $ax^z=c$

3. delle radici uguali a un numero: $ax= b$

4. dei quadrati e delle radici uguali a un numero: $ax^2 + bx = c$

5. dei quadrati e dei numeri uguali a una radice: $ax^2 + c = bx$

6. delle radici e dei numeri uguali a dei quadrati: $bx + c = ax^z$

Ai nostri occhi molte delle forme precedenti si assomigliano. Con la regola del trasporto gli ultimi tre casi si potrebbero ridurre a uno solo, che comprenderebbe anche i primi due (con uno dei coefficienti uguale a zero), tuttavia nel fare ciò dovremmo trasformare dei numeri positivi in negativi e quindi non potremmo più interpretare i termini che compaiono come quantità concrete. Le equazioni di cui Al-Khwarizmi trovò i metodi di risoluzione coinvolgono invece termini di sicuro significato pratico: pur elaborando un metodo del tutto generale, egli era infatti vincolato all'esigenza che i numeri e le soluzioni delle equazioni fossero interpretabili come quantità. E così la sottrazione, essendo un'operazione rischiosa (che «quantità» è 3 — 20?), veniva eliminata, come abbiamo visto, con al-jabr. Rimaneva tuttavia il problema delle soluzioni: poteva accettare, Al-Khwarizmi, quelle negative, nulle, irrazionali (o, peggio ancora, «immaginarie», ossia con radici di numeri negativi)? Certamente no, perché ciò avrebbe significato accettare come risultato di problemi pratici, legati soprattutto alle dispute sulla distribuzione delle eredità, soluzioni senza alcun significato concreto. In ogni caso è interessante che il procedimento seguito da Al-Khwarizmi fosse di occuparsi, prima, delle equazioni, e, solo successivamente, dei problemi che esse potevano risolvere. Dunque l'essenza dell'algebra, da lui inventata, si trova nella ricerca di metodi e procedimenti di calcolo (che oggi chiameremmo «algoritmi», utilizzando una parola di origine latina che tradusse malamente il nome arabo del nostro matematico, in modo da richiamare anche la parola greca «arithmos», numero) che portano a trovare delle formule per determinare le soluzioni di equazioni senza dover ripetere tutte le volte gli stessi calcoli.