# Geometria euclidea

## 5. La circonferenza

*Definizioni*

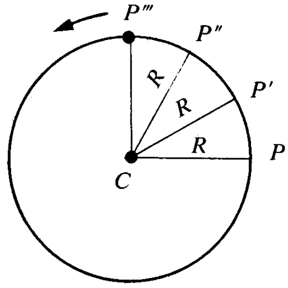

Fig. 1

Si chiama **circonferenza** il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto C, detto *centro*. La distanza R tra un qualunque punto P appartenente alla circonferenza e il suo centro C si chiama *raggio*.
Una circonferenza è completamente determinata quando si conoscono la posizione del centro e la misura del raggio. Infatti, un punto che si muove nel piano in modo da mantenere sempre la stessa distanza da un punto fisso descrive una circonferenza (fig.1): da questo deriva l'uso del compasso per disegnare la circonferenza.

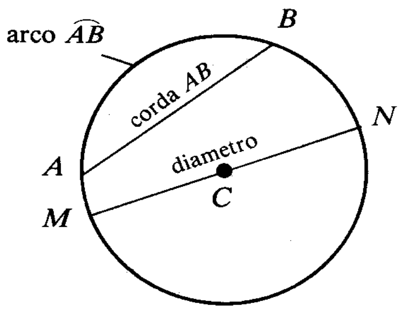

Fig. 2

La figura formata dall'insieme dei punti appartenenti alla circonferenza e di quelli ad essa interni è detta *cerchio*; la circonferenza è il contorno del cerchio.
Ogni parte di circonferenza compresa tra due punti della circonferenza stessa si chiama **arco** di circonferenza.
Osserva che due punti A e B della circonferenza definiscono due archi distinti, in quanto posso muovermi da A verso B sia in senso orario che antiorario (fig.2).
Il segmento che congiunge due punti della circonferenza si chiama **corda**. Una corda passante per il centro della circonferenza si chiama **diametro**.
Si dice che la corda AB è *sottesa* da ciascuno dei due archi AB.

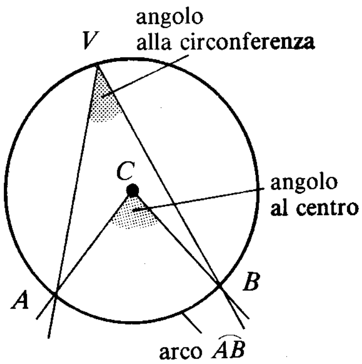

Fig. 3

Un angolo avente il vertice nel centro di una circonferenza viene detto **angolo al centro**.
Si chiama invece **angolo alla circonferenza** un angolo il cui vertice appartiene alla circonferenza e i cui lati intersecano la circonferenza.
Facendo riferimento alla fig.3, si dice che l'angolo al centro $A\hat{C}B$ e l'angolo alla circonferenza $A\hat{V}B$ *insistono* entrambi sull'arco AB e sono tra loro corrispondenti.

*Teorema 23*

Dati tre punti non allineati, esiste sempre una ed una sola circonferenza che passa per tali punti.
Abbiamo già dimostrato questa affermazione, in forma leggermente diversa, nel teorema 19.
Infatti, se A, B, C sono i tre punti dati, la circonferenza che passa per tali punti ha come centro il circocentro del triangolo ABC, e come raggio la distanza tra il circocentro ed uno qualunque dei tre

punti (vedi fig. 4).

- Quante sono, invece, le circonferenze che passano per due punti dati? Quali sono? Il teorema resta valido se i tre punti dati sono allineati?
- Osserva che *l'asse di qualunque corda passa per il centro*.
- Il teorema resta valido se consideriamo come nostro ambiente lo spazio anziché il piano?

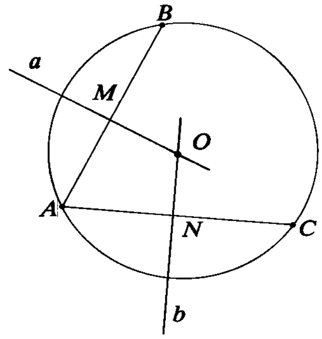


*Fig. 4*

*Teorema 24 (proprietà delle corde)*

a) In una circonferenza, qualunque corda non passante per il centro è minore del diametro.

b) Se dal centro di una circonferenza conduco la perpendicolare ad una corda, allora tale retta divide la corda in due parti uguali.

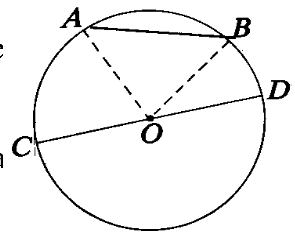


*Fig. 5*

*Dimostrazione*

a) Data la corda AB (fig. 5), congiungi A e B con il centro della circonferenza. Al triangolo AOB può essere applicato il teorema 8, per il quale un lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due. Quindi:

$AB < AO + OB = 2r$ c.v.d.

b) *Ipotesi:* $AO = OB\,;\ \ OM \perp AB$ (vedi fig. 6)

*Tesi:* $AM = MB$

Svolgi la dimostrazione come esercizio.

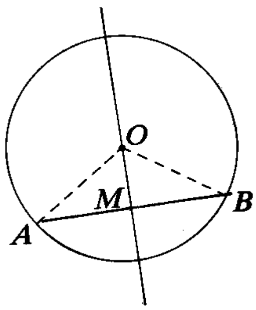


*Fig. 6*

*Teorema 25*

In una data circonferenza, o in due circonferenze uguali, ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali e corde uguali, e viceversa.

Facendo riferimento alla fig.7: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow arco\,AB = arco\,CD$ .

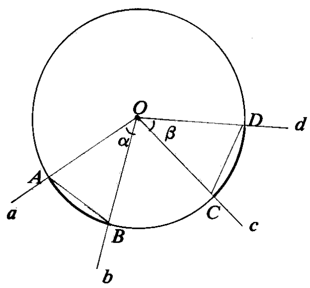


*Fig. 7*

Non svolgiamo la dimostrazione. Intuitivamente, osserva che un'opportuna rotazione attorno al centro O porta l'angolo α a sovrapporsi all'angolo β, e lo stesso per gli archi e le corde corrispondenti.

*Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza*

Esaminando la fig. 8, puoi renderti conto che una retta ed una circonferenza possono trovarsi in tre posizioni reciproche:

i. Se la distanza tra il centro della circonferenza e la retta è *maggiore* del raggio, la retta è **esterna** alla circonferenza; ovvero retta e circonferenza non hanno alcun punto in comune.

ii. Se la distanza CH tra il centro e la retta è *uguale* al raggio, allora la retta e la circonferenza hanno in comune il punto H.

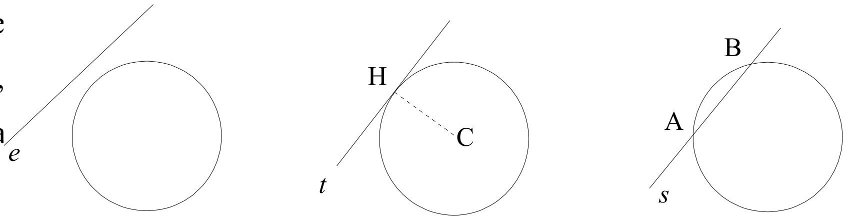


*Fig. 8 Posizioni reciproche di retta e circonferenza*

In questo caso si dice che la retta è **tangente** alla circonferenza e il punto di contatto H è detto **punto di tangenza**.

Osserva che *la retta tangente e il raggio passante per il punto di tangenza sono tra loro perpendicolari*, per la definizione di distanza tra un punto ed una retta.

iii. Infine, se la distanza tra il centro e la retta è *minore* del raggio, la retta interseca la circonferenza in due punti distinti. Si dice allora che la retta è **secante** (con una "c"!) rispetto alla circonferenza.

- Basandoti sulle tue reminiscenze di latino, cerca l'etimologia dei termini "tangente" e "secante".
- Prova a classificare in maniera analoga le posizioni reciproche di due circonferenze.

*Angoli al centro ed alla circonferenza*

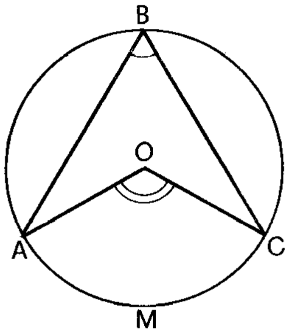


*Fig. 9*

Considera la fig. 9: secondo le definizioni che abbiamo dato in precedenza, l'angolo al centro $A\hat{O}C$ e il corrispondente angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ insistono entrambi sull'arco AMC (usiamo tre lettere per indicare a quale dei due archi aventi come estremi A e C stiamo facendo riferimento).

Osserva che ad un angolo alla circonferenza corrisponde un unico angolo al centro, mentre ad un angolo al centro corrispondono infiniti angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco: prova a tracciarne qualcuno. Quindi, la corrispondenza tra gli angoli al centro e i rispettivi angoli alla circonferenza, non è biunivoca.

Ampliamo la nostra precedente definizione e diciamo che un angolo alla circonferenza ha il vertice appartenente alla circonferenza, mentre i lati possono essere:

- entrambi secanti la circonferenza (figg. 3 e 9)
- oppure uno secante ed uno tangente la circonferenza (fig. 10).

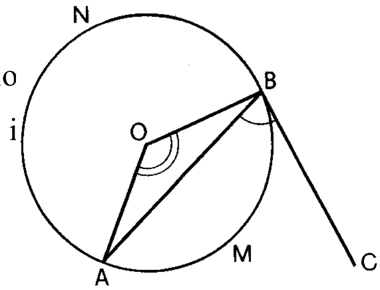


*Fig. 10*

In altre parole, stiamo dicendo che la fig. 10 rappresenta un angolo al centro $A\hat{O}B$ ed il corrispondente angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$, che insistono entrambi sull'arco AMB.

Intuitivamente, tale ampliamento è giustificato dal fatto che una retta tangente rispetto alla circonferenza può essere considerata come il caso limite di una retta secante, quando i due punti di intersezione con la circonferenza si avvicinano indefinitamente.

Per esempio, la fig. 11 rappresenta gli angoli alla circonferenza $A\hat{V}_1B$ , $A\hat{V}_2B$ , $A\hat{V}_3B$ , $A\hat{B}T$ , $B\hat{A}T'$ che insistono tutti sull'arco AB. L'angolo $A\hat{B}T$ può essere visto come la posizione limite assunta da un angolo $A\hat{V}B$ quando il vertice V si muove verso B lungo la circonferenza. Un discorso analogo vale per $B\hat{A}T'$ .

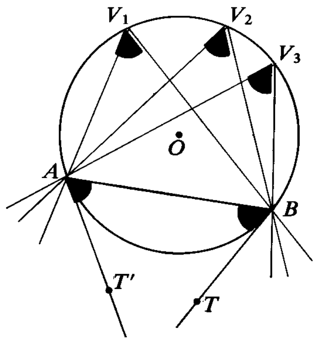

*Fig. 11*

*Teorema 26*

Ogni angolo alla circonferenza è uguale alla metà del corrispondente angolo al centro (che insiste sullo stesso arco).

Per dimostrare il teorema conviene distinguere vari casi.

*Caso i).* I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti la circonferenza stessa e un lato passa per il centro (fig. 12).

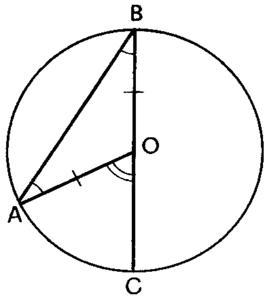

*Fig. 12*

*Dimostrazione i)*

All'angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ corrisponde l' angolo al centro $A\hat{O}C$ .

Indico con $A\hat{B}C=\alpha$ l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza.

Poiché $OA=OB=r$ in quanto raggi della stessa circonferenza, il triangolo OAB è isoscele. Quindi $O\hat{A}B=O\hat{B}A=\alpha$ per il teorema 1.

Per il teorema 5: $A\hat{O}B=180°-O\hat{A}B-O\hat{B}A=180°-2\alpha$ .

Infine, poiché $A\hat{O}C$ è adiacente (e quindi supplementare) ad $A\hat{O}B$ :

$A\hat{O}C=180°-A\hat{O}B=180°-(180°-2\alpha)=2\alpha$ c.v.d.

*Caso ii).* I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro è interno all'angolo alla circonferenza. (fig. 13).

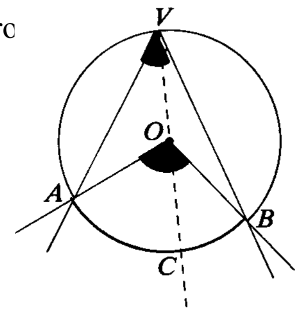

*Fig. 13*

*Dimostrazione ii)*

L'angolo alla circonferenza è $A\hat{V}B$ ed il corrispondente angolo al centro è $A\hat{O}B$ . Traccio il diametro VC.

Se chiamo $A\hat{V}C=\alpha$ e $B\hat{V}C=\beta$ , ho $A\hat{V}B=\alpha+\beta$ .

Per la dimostrazione del caso i), ho: $A\hat{O}C=2\alpha$ , $B\hat{O}C=2\beta$ ; quindi: $A\hat{O}B=2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)$ c.v.d.

*Caso iii)*. I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro è esterno all'angolo alla circonferenza. (fig. 14).

La dimostrazione è analoga a quella del caso ii), con la differenza che ora consideriamo la differenza di due angoli, anziché la loro somma. Prova a svolgerla come esercizio.

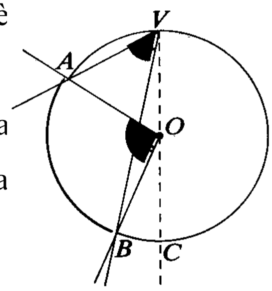


*Fig. 14*

*Caso iv)*. L'angolo alla circonferenza ha un lato secante ed uno tangente rispetto alla circonferenza stessa (fig. 15).

*Dimostrazione iv)*

L'angolo alla circonferenza è $A\hat{B}C$ ed il corrispondente angolo al centro è $A\hat{O}B$. Chiamo $A\hat{B}C=\alpha$.

Poiché la tangente è perpendicolare al raggio passante per il punto di tangenza, ho $O\hat{B}A=90°-\alpha$.

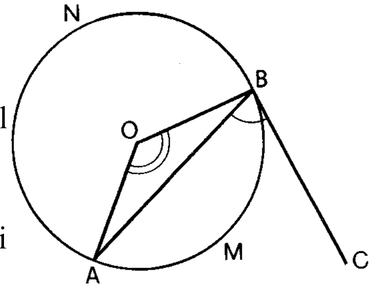


*Fig. 15*

Poiché $OA=OB=r$, il triangolo AOB è isoscele, quindi $O\hat{A}B=O\hat{B}A=90°-\alpha$.

Per il teorema 5: $A\hat{O}B=180°-O\hat{A}B-O\hat{B}A=180°-(90°-\alpha)-(90°-\alpha)=2\alpha$ c.v.d.

*Corollario 7*

In una circonferenza, tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco (o su archi uguali) sono uguali tra loro.

Infatti, sono tutti uguali alla metà dello stesso angolo al centro (o di angoli al centro uguali).

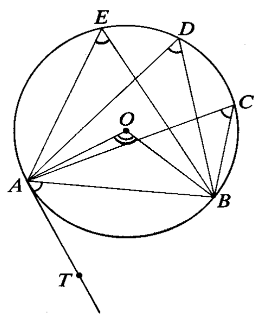


*Fig. 16*

Ad esempio, nella fig. 16 ho: $A\hat{C}B=A\hat{D}B=A\hat{E}B=B\hat{A}T=\frac{1}{2}A\hat{O}B$.

*Corollario 8*

Ogni angolo che insiste su una semicirconferenza è retto.

Infatti, esso è uguale alla metà del corrispondente angolo al centro, che è un angolo piatto (fig. 17).

Vale anche il teorema inverso: "Se il triangolo ABC è rettangolo in C, allora il vertice C appartiene alla circonferenza di diametro AB". La dimostrazione si svolge per assurdo, e non la riportiamo.

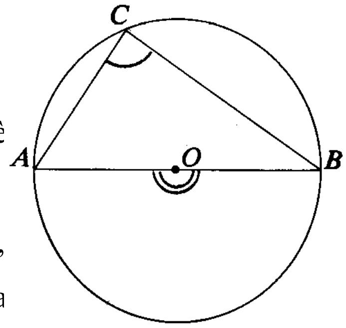


*Fig. 17*

*Tangenti ad una circonferenza passanti per un punto*

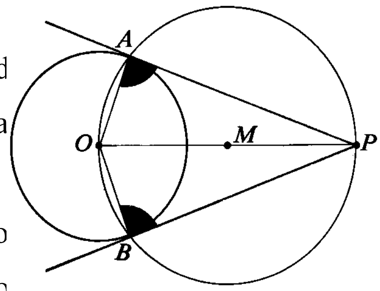

*Fig. 18*

Data una circonferenza (quella di centro O in fig. 18) e un punto P ad essa esterno, vogliamo tracciare le rette passanti per P e tangenti alla circonferenza.

Uniamo P con il centro O e disegniamo la circonferenza di diametro OP (ha come centro il punto medio M del segmento OP e come raggio OM=MP).

La circonferenza di centro M interseca quella data in due punti A e B: le rette PA e PB sono le tangenti che cercavamo. Infatti, gli angoli $O\hat{A}P$ e $O\hat{B}P$ , insistendo su una semicirconferenza, sono retti per il corollario 8, e quindi le rette PA e PB, essendo rispettivamente perpendicolari ai raggi OA e OB, risultano tangenti alla circonferenza data.

*Teorema 27*

Dalla costruzione precedente segue che:

a) i segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza (compresi tra tale punto e i punti di contatto) sono uguali;

b) la semiretta che congiunge il punto da cui escono le tangenti con il centro della circonferenza è bisettrice sia dell'angolo formato dalle tangenti che dell'angolo formato dai raggi che passano per i punti di contatto;

c) tale semiretta è anche asse del segmento che unisce i punti di contatto.

*Ipotesi:* *PA e PB tangenti alla circonferenza* (fig. 18)

*Tesi:* $PA = PB\,;\quad A\hat{P}O = B\hat{P}O\,;\quad A\hat{O}P = B\hat{O}P\,;\quad AB \text{ asse di } OP$

Svolgi la dimostrazione per esercizio; devi far vedere che i triangoli APO e BPO sono uguali.

## 6. Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

*Definizioni*

Un poligono si dice **inscritto** *in* una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza (fig. 19); in questo caso la circonferenza si dice inscritta al poligono.

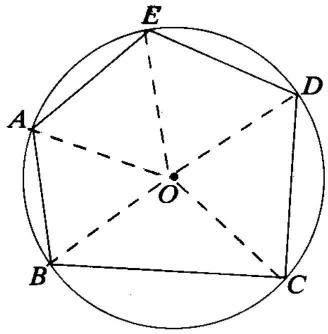


*Fig. 19 Poligono inscritto in una circonferenza.*

Un poligono si dice **circoscritto** *ad* una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti la circonferenza (fig. 20); la circonferenza viene detta inscritta al poligono.

In pratica è inscritta la figura che "sta dentro"; è circoscritta la figura che "sta fuori". (Ovviamente, è proibito ripetere in classe una simile oscenità).

Ci chiediamo: per quali poligoni esistono una circonferenza nella quale essi siano inscritti ed una circonferenza alla quale essi siano circoscritti; ovvero, quali poligoni sono inscrivibili e quali sono circoscrivibili ad una circonferenza? In generale possiamo dire che:

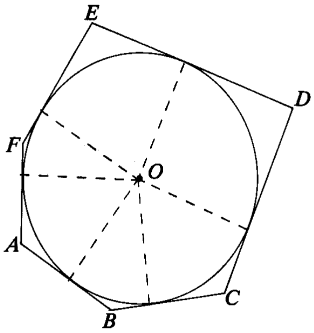


*Fig. 20 Poligono circoscritto ad una circonferenza.*

- Un poligono è inscrivibile in una circonferenza se e soltanto se esiste un punto equidistante da tutti i suoi vertici, e quindi se tutti gli assi dei suoi lati si incontrano in uno stesso punto che, se esiste, sarà il centro della circonferenza circoscritta al poligono.
- Un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se e soltanto se esiste un punto equidistante da tutti i suoi lati, e quindi se tutte le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto, che, se esiste, sarà il centro della circonferenza inscritta al poligono.

*Teorema 28*

Ogni triangolo è sempre inscrivibile in una circonferenza, il cui centro è il circocentro del triangolo (punto di intersezione degli assi).

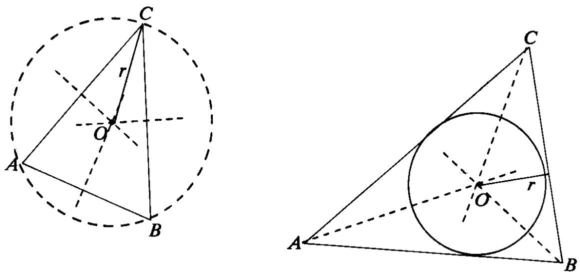


*Fig. 21 Circonferenza circoscritta e inscritta ad un triangolo.*

Ogni triangolo è sempre circoscrivibile ad una circonferenza, il cui centro è l'incentro del triangolo (punto di intersezione delle bisettrici).

Abbiamo già dimostrato queste affermazioni, secondo un punto di vista lievemente diverso, con i teoremi 19 (ripreso dal teorema 23) e 20 .

*Teorema 29*

Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e soltanto se i suoi angoli opposti sono supplementari.

Dimostriamo soltanto che, se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, allora i suoi angoli opposti sono supplementari; la dimostrazione del teorema inverso si svolge per assurdo.

*Ipotesi:* $A, B, C, D \in circonferenza$

*Tesi:* $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180°$

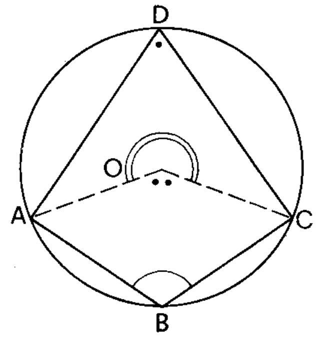

*Fig. 22*

*Dimostrazione*

Indichiamo $\hat{B}=\beta$ , $\hat{D}=\delta$ .

Per il teorema 26 i corrispondenti angoli al centro misureranno:

$A\hat{O}C(convesso)=2\delta$ ; $A\hat{O}C(concavo)=2\beta$ .

D'altra parte, tali angoli formano un angolo giro: $2\beta+2\delta=360°$ .

Dividendo per 2 l'uguaglianza precedente ho: $\beta+\delta=180°$ c.v.d.

Per dimostrare che anche $\hat{A}+\hat{C}=180°$ , posso ripetere il ragionamento precedente, o semplicemente osservare che $\hat{A}+\hat{C}=360°-(\hat{B}+\hat{D})=180°$ per il corollario 6 sulla somma degli angoli interni di un quadrilatero.

*Teorema 30*

Un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza se e soltanto se la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

Dimostriamo soltanto che se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza, allora la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due; la dimostrazione del teorema inverso si svolge per assurdo.

*Ipotesi:* $ABCD$ *circoscritto a circonferenza*

*Tesi:* $AB+CD=BC+AD$

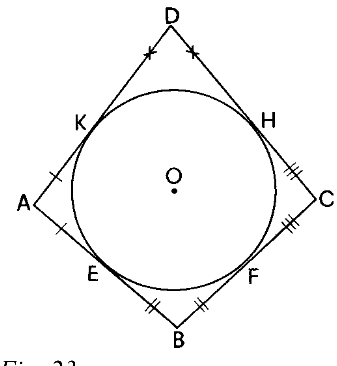

*Fig. 23*

*Dimostrazione*

Indico con E, F, H, K i punti di tangenza dei lati.

Per il teorema 27a) so che:

$AE=AK=x$ , $BE=BF=y$ , $CF=CH=z$ , $DH=DK=t$ .

Sommando i diversi "pezzetti", ottengo:

$AD+BC=AB+CD=x+y+z+t$ c.v.d.

Una curiosità: puoi vedere e ascoltare un'esposizione di questa dimostrazione (bella per la sua assoluta semplicità) nel film "Arrivederci ragazzi" del regista francese Louis Malle. Non ti preoccupare: il tema del film non è la matematica, ma l'adolescenza e la necessità di maturare anche attraverso delle esperienze dolorose (molto più delle interrogazioni di geometria).

- Tra i quadrilateri che abbiamo studiato, quali sono inscrivibili in una circonferenza? Quali sono circoscrivibili ad una circonferenza?

*Poligoni regolari*

Un poligono viene detto **regolare** quando ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali, cioè quando è sia equilatero che equiangolo.

Osserva che, mentre per i triangoli le proprietà di avere i lati uguali e gli angoli uguali sono equivalenti, già per i quadrilateri questo non è più vero: il rombo è equilatero, ma non è equiangolo; il rettangolo è equiangolo, ma non equilatero. Quindi, un quadrilatero regolare è necessariamente un quadrato.

*Teorema 31*

a) Se una circonferenza è suddivisa in $n$ archi uguali, il poligono che si ottiene congiungendo successivamente i punti di divisione è regolare. Inoltre, anche il poligono i cui lati sono tangenti alla circonferenza nei punti di divisione è regolare (fig. 24).

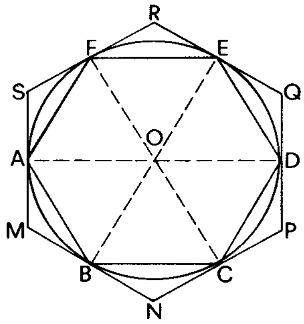

*Fig. 24*

b) Viceversa, se un poligono è regolare, allora esso è sia circoscrivibile che inscrivibile ad una circonferenza. Le due circonferenze hanno lo stesso centro, che viene chiamato centro del poligono; il raggio della circonferenza inscritta si dice **apotema** e quello della circonferenza circoscritta si dice *raggio* del poligono.

Prova a svolgere le dimostrazioni come esercizio.

*Corollario 9*

Il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza è uguale al raggio della circonferenza.

**7. Similitudine**

Finora hai visto come si affronta in maniera abbastanza rigorosa lo studio dell'uguaglianza (più correttamente detta *isometria* o *congruenza*) tra figure geometriche nel piano.
Ora consideriamo figure che, in senso intuitivo, “hanno la stessa forma”, pur potendo avere dimensioni diverse. Chiameremo **simili** due figure che “hanno la stessa forma” e **similitudine** la relazione che intercorre tra di esse.
Cerchiamo adesso di rendere un po' più precisa l'idea enunciata.

*Definizione*
Due poligoni $F$ ed $F'$ si dicono **simili** se tra i loro punti esiste una corrispondenza biunivoca tale che:

i) *gli angoli corrispondenti sono uguali* (hanno la stessa ampiezza);

ii) *il rapporto tra due lati corrispondenti è costante* (cioè è lo stesso per tutte le coppie di lati corrispondenti):

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=...=k \quad \text{, ovvero} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=...=\frac{1}{k}\quad .$$

Tale rapporto costante si chiama anche **rapporto di similitudine** tra i due poligoni, e questa relazione si può esprimere dicendo che *due poligoni simili hanno i lati in proporzione.*

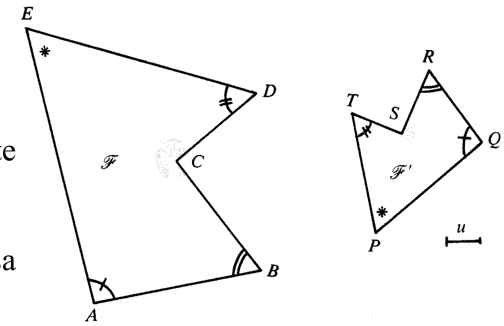

*Fig. 25 Poligoni simili*

In realtà, almeno per i triangoli, queste due condizioni (quella sui lati e quella sugli angoli) sono sovrabbondanti, nel senso che una delle due implica l'altra. Cerchiamo di dirlo decentemente.

*Teorema 32 (Primo criterio di similitudine dei triangoli).*
Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora hanno anche i lati corrispondenti in proporzione, e quindi sono simili (fig. 26).

*Ipotesi:* $\hat{A}=\hat{P}\,,\hat{B}=\hat{Q}\ \ (e\,quindi\,\hat{C}=\hat{R})$

*Tesi:* $\dfrac{AB}{PQ}=\dfrac{BC}{QR}=\dfrac{CA}{RP}\ \ (e\,quindi\,ABC\sim PQR)$

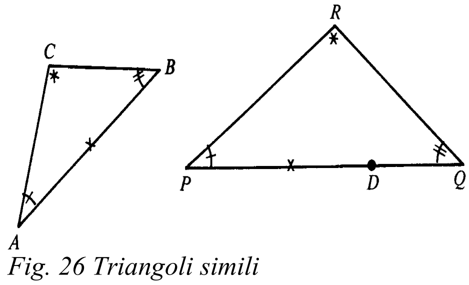

*Fig. 26 Triangoli simili*

*Teorema 33 (Terzo criterio di similitudine dei triangoli).*
Se due triangoli hanno i lati ordinatamente proporzionali, allora hanno anche gli angoli corrispondenti uguali, e quindi sono simili.

*Ipotesi:* $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CA}{RP}$

*Tesi:* $\hat{A}=\hat{P}\,,\hat{B}=\hat{Q}\,,\hat{C}=\hat{R}\quad (e\,quindi\; ABC\sim PQR)$

*Osservazioni*

- Per avere il diritto di chiamare teoremi queste proposizioni, dovremmo dimostrarne la validità in generale, cosa che per noi è un po' laboriosa. Allora, considerandoli come veri senza dimostrarli, in pratica li stiamo trattando come se fossero degli *assiomi* o *postulati*.
- Forse ti starai chiedendo se non manca qualche riga delle fotocopie. Rispondo: sì, esiste anche un secondo criterio di similitudine dei triangoli, che "mescola" le informazioni sui lati e quelle sugli angoli, ma si usa piuttosto raramente; se ne avrai mai bisogno, lo potrai trovare su qualunque testo di geometria del biennio.
- Un'altra domanda che a questo punto dovresti farti è la seguente: per vedere se due poligoni sono simili è proprio necessario controllare che abbiano <u>sia</u> gli angoli uguali <u>che</u> i lati in proporzione? Abbiamo appena detto che per i triangoli basta verificare una sola delle due condizioni; cosa succede per poligoni con un numero di lati maggiore? Prova a rispondere tu.
  (Suggerimento: pensa se due rombi o due rettangoli sono necessariamente simili).
- Sapresti invece trovare delle "categorie" di poligoni che siano tutti simili tra loro?
- Se due poligoni sono simili, i lati dell'uno si ottengono da quelli dell'altro moltiplicando o dividendo le loro misure per il rapporto di similitudine; succederà la stessa cosa anche per le diagonali, le altezze, le mediane, le bisettrici, i perimetri ed in genere per ogni coppia di segmenti corrispondenti? La risposta è affermativa, e, nel caso dei triangoli, ne daremo un paio di semplici dimostrazioni subito dopo.
- Succederà lo stesso anche per le aree dei poligoni? Neanche per sogno! <u>*Il rapporto delle aree è il quadrato del rapporto di similitudine*</u>. Pensaci: se raddoppi i lati di un quadrato, la sua area raddoppia? (Attento a non dire scemenze).

*Corollario 10*

Una retta parallela ad un lato di un triangolo individua con gli altri due lati o con i loro prolungamenti un nuovo triangolo, simile a quello dato.

*Ipotesi:* $DE \| BC$ (fig. 27)

*Tesi:* $ADE\sim ABC$

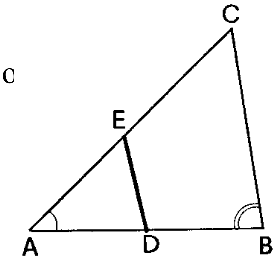

*Fig. 27*

Prova a svolgere la dimostrazione per esercizio.

*Teorema 34 (proprietà dei triangoli simili)*

Se due triangoli sono simili, allora:

a) il rapporto tra le altezze corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine;

b) il rapporto tra i perimetri è uguale al rapporto di similitudine;

c) il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

*Ipotesi:* $ABC \sim A'B'C'$; $\dfrac{A'B'}{AB}=k$

*Tesi:* $\dfrac{C'H'}{CH}=k$; $\dfrac{2p'}{2p}=k$; $\dfrac{S'}{S}=k^2$

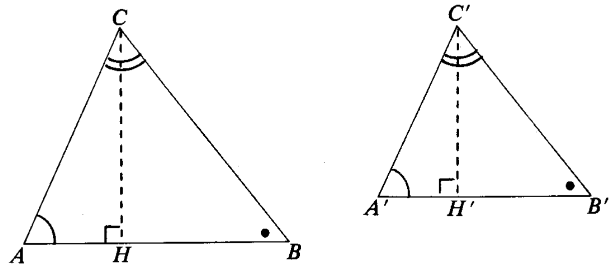

*Fig. 28*

*Dimostrazione*

a) Per ipotesi: $\dfrac{A'C'}{AC}=k$ (fig. 28).

Tracciando le altezze CH e C'H', ottengo che i triangoli ACH e A'C'H' sono simili per il 1° criterio di similitudine, in quanto hanno $\hat{A}=\hat{A}'$ per ipotesi e $\hat{H}=\hat{H}'=90°$ per costruzione.

Ne deduco che $\dfrac{C'H'}{CH}=\dfrac{A'C'}{AC}=k$ c.v.d.

b) Per ipotesi: $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A'}{CA}=k$ .

Ne deriva che: $A'B'=k\,AB$ ; $B'C'=k\,BC$ ; $C'A'=k\,CA$ . Quindi:

$2p'=A'B'+B'C'+C'A'=k\,AB+k\,BC+k\,CA=k(AB+BC+CA)=k\,2p$ c.v.d.

c) $S'=\dfrac{1}{2}\cdot A'B'\cdot C'H'=\dfrac{1}{2}\cdot k\,AB\cdot k\,CH=k^2(\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CH)=k^2 S$ c.v.d.

*Teorema 35 (di Talete)*

Un fascio di rette parallele determina su due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali.

*Ipotesi:* $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$

*Tesi:* $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$ ovvero $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{C'D'}{CD}=...=k$ .

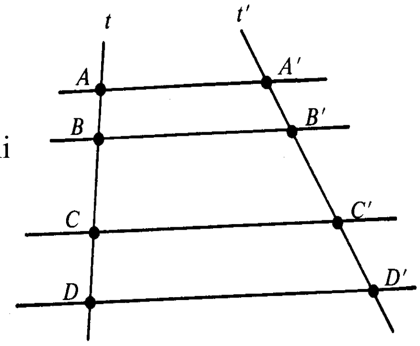

*Fig. 29 Teorema di Talete*

E' una generalizzazione del teorema 16, che si applicava solo al caso in cui AB=CD.

Non diamo una vera dimostrazione, ma ci limitiamo ad un caso particolare in cui i segmenti sulla prima trasversale sono *commensurabili*, cioè hanno un sottomultiplo comune *u*, che può essere considerato un'unità di misura.

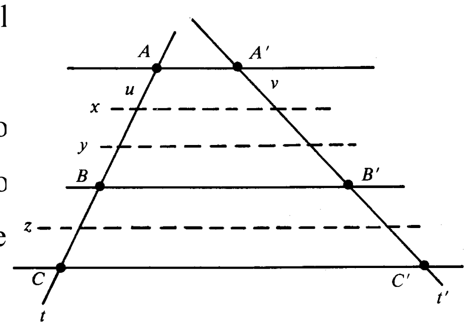

*Fig. 30*

Se, ad esempio, $AB=3u$ , $BC=2u$ (fig. 30), possiamo condurre le rette *x*, *y*, *z* del fascio di parallele che dividono AB e BC in cinque segmenti di lunghezza *u*. Per il teorema 16, anche i cinque segmenti corrispondenti sulla seconda trasversale avranno la stessa lunghezza, che indichiamo con *v*: $A'B'=3v$ , $B'C'=2v$ .

Quindi: $\frac{AB}{BC}=\frac{3u}{2u}=\frac{3}{2}$ ; $\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{3v}{2v}=\frac{3}{2}$ c.v.d.

oppure: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{3v}{3u}=\frac{v}{u}$ ; $\frac{B'C'}{BC}=\frac{2v}{2u}=\frac{v}{u}$ c.v.d.

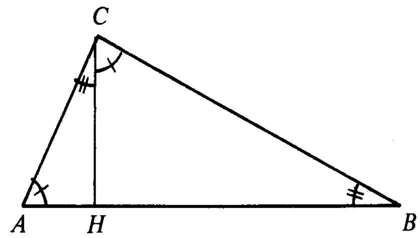

*Fig. 31 Teoremi di Euclide*

*Teorema 36 (Primo teorema di Euclide)*

In un triangolo rettangolo, il quadrato di un cateto è uguale al prodotto tra l'ipotenusa e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.

*Ipotesi:* $A\hat{C}B=90°$ (fig. 31)

*Tesi:* $AC^2=AB\cdot AH$ ; $BC^2=AB\cdot BH$

*Dimostrazione*

Conducendo l'altezza relativa all'ipotenusa CH, puoi osservare che i triangoli ABC, ACH e BCH sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli.

Se considero i lati corrispondenti dei triangoli ABC e ACH, posso scrivere la proporzione:

$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AH}$ ; da cui, eliminando i denominatori: $AC^2=AB\cdot AH$ c.v.d.

Prendendo in considerazione i triangoli ABC e BCH, ho la seconda parte della tesi.

*Teorema 37 (Secondo teorema di Euclide)*

In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

*Ipotesi:* $A\hat{C}B=90°$ (fig. 31)

*Tesi:* $CH^2=AH\cdot BH$

*Dimostrazione*

Considero i triangoli ACH e BCH, simili per il primo criterio di similitudine.

Prendendo i lati corrispondenti, ho la proporzione: $\frac{AH}{CH}=\frac{CH}{BH}$ .

Eliminando i denominatori, ricavo: $CH^2=AH\cdot BH$ c.v.d.

*Teorema 38 (Teorema di Pitagora)*

In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.

*Ipotesi:* $A\hat{C}B = 90°$ (fig. 31)

*Tesi:* $AB^2 = AC^2 + BC^2$

*Dimostrazione*

Dal primo teorema di Euclide ottengo: $AC^2 = AB \cdot AH$ ; $BC^2 = AB \cdot BH$ .

Quindi: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AH + AB \cdot BH = AB \cdot (AH + BH) = AB \cdot AB = AB^2$ c.v.d.

Osserviamo che in realtà su tutti i testi di geometria si trova un'altra dimostrazione del teorema di Pitagora, molto più "geometrica" (si costruiscono dei poligoni aventi la stessa area), ma anche molto più complessa di quella che abbiamo riportato.

*Osservazione*

Sia i teoremi di Euclide che quello di Pitagora sono invertibili. Ad esempio, se vale la relazione $AB^2 = AC^2 + BC^2$ tra i lati di un triangolo, allora il triangolo ABC è rettangolo.

*Corollario 11 (relazioni metriche tra gli elementi di particolari figure)*

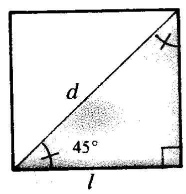

*Fig. 32*

a) Relazione tra lato e diagonale di quadrato (fig. 32): $d = l\sqrt{2}$

b) Relazione tra altezza e lato di un triangolo equilatero (fig. 33):

$$h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

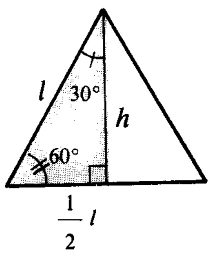

*Fig. 33*

c) Relazioni tra gli elementi di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza (fig. 34): $l = R\sqrt{3}$ ;

$$h = \frac{3}{2}R$$

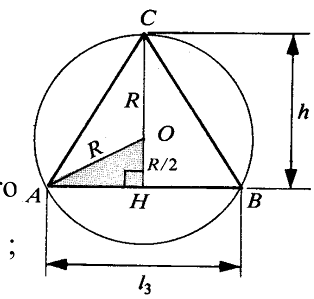

*Fig. 34*

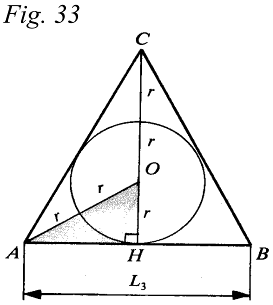

*Fig. 35*

d) Relazioni tra gli elementi di un triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza (fig. 35): $L = 2r\sqrt{3}$ ; $H = 3r$

e) Raggio del cerchio inscritto in un triangolo (in realtà in un poligono) generico (fig. 36): $r = \frac{Area}{p}$

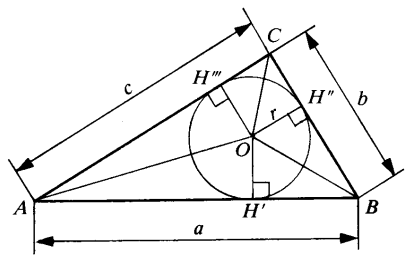

*Fig. 36*

**Esercizi geometria euclidea**

**Circonferenza**

1. Disegna una circonferenza di centro O e conduci la tangente in un suo punto T. Indica con B e D due punti di tale retta equidistanti dal punto di contatto. Dimostra che BC=DC.
2. Dagli estremi del diametro AB di una circonferenza conduci le corde parallele AP e BQ. Dimostra che tali corde sono uguali.
3. Traccia due circonferenze secanti nei punti A e B. Dimostra che la corda AB è perpendicolare alla retta dei centri, ed è da questa divisa in due parti uguali.
4. In una circonferenza di centro C, disegna due corde uguali AB e DE che si intersecano nel punto Q. Dimostra che la retta CQ è bisettrice di due degli angoli formati da tali corde.
5. Dati i segmenti uguali ed adiacenti OA e OB, traccia le due circonferenze di centro O e raggi OA e OB rispettivamente. Conduci per A la retta tangente alla prima circonferenza, che interseca in C e in D la seconda. Dimostra che il quadrilatero OCBD è un rombo.
6. Due circonferenze sono tangenti esternamente. Per il punto di contatto conduci una secante che incontra le circonferenze nei punti A e B. Dimostra che le rette che congiungono questi punti con i centri delle circonferenze cui appartengono sono parallele.
7. Data una circonferenza, sia AB un suo diametro e siano AC e BD due corde parallele. Dimostra che il segmento CD è un diametro.
8. Data una circonferenza, dimostra che il quadrilatero che ha come vertici gli estremi di due diametri è un rettangolo.
9. Dati due punti A, B di una circonferenza, indichiamo con M ed N i punti medi dei due archi individuati da A e B. Dimostra che il segmento MN è un diametro.
10. Su una circonferenza di centro O, considera due corde AB=AC. Dimostra che la semiretta AO è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ .
11. Da un punto P, esterno ad una circonferenza di centro O, conduci le tangenti alla circonferenza e siano A e B i punti di tangenza. Dimostra che il segmento AB è dimezzato dalla retta PO.
12. Un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, ha tutti i vertici su una circonferenza di centro O. Dimostra che la retta CO è asse del segmento AB.
13. Su una circonferenza, traccia la corda AB e il diametro PQ ad essa perpendicolare. Dimostra che i triangoli ABP e ABQ sono isosceli.
14. Dimostra che le tangenti ad una circonferenza condotte dagli estremi di un diametro sono parallele.
15. Da un punto P, esterno ad una circonferenza di raggio O, conduci le tangenti che toccano la

circonferenza nei punti A e B. Per un punto generico del minore degli archi AB conduci una terza tangente che interseca le altre due in C e D. Dimostra che $C\hat{O}D=\frac{1}{2}A\hat{O}B$ .

16. In una circonferenza di centro O, conduci le tangenti negli estremi di un diametro AB. Conduci poi una terza tangente che interseca le precedenti in C e D. Dimostra che $C\hat{O}D=90°$ .
17. Dimostra che, se una circonferenza è tangente ad entrambi i lati di un angolo, il suo centro appartiene alla bisettrice dell'angolo.
18. Data una circonferenza di centro O, conduci la tangente in un suo punto T e prendi su di essa due segmenti AT=TB. Le rette AO e BO intersecano la circonferenza nei punti P e Q rispettivamente. Dimostra che le corde PT e QT sono uguali.
19. Dimostra che la tangente condotta nel punto medio di un arco di circonferenza è parallela alla corda sottesa dall'arco.
20. Prolunga il diametro AB di una circonferenza di un segmento BC uguale al raggio. Per un punto generico P della tangente in B conduci l'altra tangente PD. Dimostra che $D\hat{P}C=3\,B\hat{P}C$ .
21. In una circonferenza di centro O, considera il diametro AB e la corda AC. Traccia poi le tangenti in C e in B che si intersecano in D. Dimostra che OD è parallela ad AC.
22. Date due circonferenze tangenti esternamente, di centri C e C', considera la loro tangente comune *t* nel punto di contatto. Presa una delle altre due tangenti comuni alle due circonferenze, indica con A e B i rispettivi punti di contatto. Dimostra:
    a) che il quadrilatero ACC'B è un trapezio rettangolo;
    b) che la tangente *t* divide il segmento AB in due parti uguali.
23. Date due circonferenze concentriche, dimostra che tutte le corde della maggiore tangenti alla minore sono uguali e sono dimezzate dal punto di contatto.
24. Disegna due circonferenze tangenti internamente. Per il punto di contatto P conduci una secante che incontra le circonferenze nei punti A e B rispettivamente. Dimostra che le rette che congiungono i punti A e B con i centri delle circonferenze a cui appartengono sono parallele. Dimostra poi che le tangenti alle due circonferenze nei punti A e B sono parallele.
25. Le rette a e b sono tangenti ad una circonferenza di centro O, rispettivamente nei punti A e B. La retta c è tangente alla circonferenza in un generico punto C appartenente al minore degli archi di estremi A e B. Indica con P e Q le intersezioni tra la tangente c e le tangenti a e b rispettivamente. Dimostra che gli angoli $A\hat{C}B$ e $P\hat{O}Q$ sono supplementari.
26. Su una circonferenza prendi la corda AB e traccia la tangente nell'estremo A. Su tale tangente considera un punto C tale che AC=AB. La retta BC ha un'ulteriore intersezione con la

circonferenza in P. Dimostra che PC=PA.

27.Due circonferenze sono secanti nei punti A e B. Traccia i diametri AC e AD delle due circonferenze. Dimostra che i punti C, B, D sono allineati.

28.Le corde AB e AC di una circonferenza formano, da parti opposte, angoli uguali con il diametro AD. Dimostra che BC è perpendicolare ad AD.

29.Considera due circonferenze concentriche ed una loro secante comune *r*. Dimostra che i segmenti della retta *r* compresi tra le due circonferenze sotto angoli uguali.

30.Considera due circonferenze concentriche. Dimostra che le corde della circonferenza maggiore tangenti alla minore sono uguali.

31.Disegna due circonferenze tangenti esternamente in un punto T. Conduci per T una retta che tagli le circonferenze in altri due punti B e C. Dimostra che le tangenti alle circonferenze in B e in C sono parallele.

32.Disegna una circonferenza di centro O ed una sua corda AB. Nel semipiano di origine AB contenente O, conduci la semiretta tangente alla circonferenza in A, e su di essa prendi un punto C tale che AC=AB. Traccia il segmento BC che interseca la circonferenza in P. Dimostra che il triangolo APC è isoscele.

**Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza.**

33.Dimostra che ogni trapezio inscritto in una circonferenza è isoscele.

34.Dimostra che, se un parallelogrammo è inscritto in una circonferenza, allora è un rettangolo.

35.Dimostra che le diagonali condotte dal vertice di un angolo di un esagono regolare dividono l'angolo in quattro parti uguali.

36.Dimostra che, se un parallelogrammo è circoscritto ad una circonferenza, allora è un rombo.

37.Dimostra che il lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è uguale alla metà del lato del triangolo equilatero circoscritto alla stessa circonferenza.

38.Un trapezio è circoscritto ad una circonferenza. Dimostra che l'angolo avente il vertice nel centro della circonferenza ed i lati passanti per gli estremi di un lato obliquo è retto.

39.Nel triangolo acutangolo ABC, traccia le altezze AH e BK che si intersecano nel punto P. Dimostra che il quadrilatero CKPH è inscrivibile in una circonferenza.

40.Da un punto P, esterno ad una circonferenza di centro O, conduci le tangenti PA e PB. Dimostra che il quadrilatero PAOB è inscrivibile.

41.In una circonferenza di centro O, traccia un diametro AB. Prendi un punto generico C sulla circonferenza e determina la sua proiezione ortogonale P sul diametro AB. Indica con D l'intersezione della bisettrice dell'angolo $P\hat{C}O$ con la circonferenza. Dimostra che DO è perpendicolare ad AB.

42. Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa.
43. Dimostra che la circonferenza che ha come diametro un lato di un triangolo interseca gli altri due lati nei piedi delle altezze ad essi relative.
44. Una circonferenza è tangente ad entrambi i lati di un angolo. Dimostra che tutti i triangoli formati dai lati dell'angolo e da una tangente alla circonferenza che la lasci esterna hanno lo stesso perimetro.
45. Prendi due circonferenze tangenti internamente nel punto A. Per l'estremo B del diametro AB della maggiore conduci una tangente alla minore: indica con C il punto di contatto e con D l'altra intersezione con la maggiore. Dimostra che AC è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}D$ .
    Chiama E l'intersezione tra il segmento AD e la circonferenza maggiore ed F l'estremo del diametro AF della circonferenza minore. Dimostra che le rette EF e DB sono parallele.
46. Prolunga il raggio OA di una circonferenza di un segmento AB uguale al raggio stesso. Dal punto B conduci le tangenti BP e BQ alla circonferenza. Dimostra che il quadrilatero OPAQ è un rombo con un angolo doppio dell'altro.
47. Traccia il diametro AB di una circonferenza di centro O. Da un punto C della circonferenza conduci la tangente che interseca in P la tangente condotta da B. Dimostra che le rette OP e AC sono parallele.
48. In una circonferenza traccia i diametri AB e CD. Dall'estremo C conduci la perpendicolare al diametro AB, che interseca in E la circonferenza. Dimostra che $DE \| AB$ .
49. Dimostra che ogni quadrilatero intrecciato inscritto in una circonferenza ha gli angoli a due a due uguali.
50. Dimostra che, se l'esagono ABCDEF è circoscritto ad una circonferenza, si ha:
    AB+CD+EF=BC+DE+FA.
51. Dimostra che, se si unisce il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo con i suoi vertici, si formano tre angoli, rispettivamente doppi degli angoli del triangolo.
52. Dimostra che, in un esagono regolare, ogni diagonale che divide l'esagono in un triangolo e un pentagono è perpendicolare a due lati dell'esagono.
53. Dimostra che due vertici di un triangolo e i piedi delle altezze condotte da essi giacciono su una stessa circonferenza.
54. Dimostra che:
    a) l'ampiezza di ciascuno degli angoli interni di un poligono regolare è $\frac{n-2}{n}180°$ ;
    b) i soli poligoni regolari uguali che possono essere usati per ricoprire un piano (immagina di

piastrellare una stanza) sono il triangolo, il quadrato e l'esagono.

**Similitudine**

55. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno due lati corrispondenti che misurano AB = 20 cm e A'B' = 12 cm. Sapendo che 2p(ABC) = 60 cm, calcola il perimetro di A'B'C'. [36 cm]

56. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno rapporto di similitudine $k=\frac{2}{3}$ ; determina l'area di A'B'C' sapendo che l'area di ABC misura 180 $cm^2$. [80 $cm^2$]

57. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno due lati corrispondenti che misurano AB = 5 cm e A'B' = 7 cm, mentre l'area di ABC è 30 $cm^2$. Determina l'area di A'B'C'. [58.8 $cm^2$]

58. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno aree che misurano rispettivamente 28 $cm^2$ e 63 $cm^2$. Calcola il rapporto di similitudine. $[k=\frac{3}{2}]$

59. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno rapporto di similitudine $k=\frac{3}{5}$ . Determina il perimetro di A'B'C' sapendo che il perimetro di ABC è 54 cm. [32.4 cm]

60. Due poligoni *P* e *P*' sono simili ed hanno aree che misurano 110.08 $cm^2$ e 172 $cm^2$ rispettivamente. Sapendo che il lato AB misura 8 cm, determina A'B'. [10 cm]

61. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno AB = 40 cm e A'B' = 60 cm. Sapendo che l'altezza relativa ad A'B' misura C'H' =25 cm, determina l'altezza CH relativa ad AB. $[CH=\frac{50}{3}cm]$

62. Nel triangolo ABC, una retta parallela al lato AB interseca l'altezza CH nel suo punto medio M e i lati AC e BC nei punti P e Q. Determina:
    a) il rapporto di similitudine tra i triangoli PQC e ABC; $k=\frac{1}{2}$
    b) il rapporto tra le aree di tali triangoli; $k^2=\frac{1}{4}$
    c) il rapporto tra le aree del triangolo PQC e del trapezio ABPQ; $\frac{1}{3}$
    d) il perimetro del triangolo PQC, sapendo che quello del triangolo ABC è 18 cm. $9\,cm$

63. Una retta parallela al lato AB del triangolo ABC interseca l'altezza CH nel suo punto L tale che $LH=2\,CL$ e i lati AC e BC nei punti P e Q. Determina:
    a) il rapporto di similitudine tra i triangoli PQC e ABC;
    b) l'area del triangolo PQC, sapendo che quella del triangolo ABC è $60\,cm^2$ ;
    c) il rapporto tra le aree del trapezio ABPQ e del triangolo PQC.

64.Il punto G è il baricentro del triangolo ABC. Per G conduci una retta parallela al lato AB che interseca i lati AC e BC nei punti P e Q. Determina:

a) il rapporto di similitudine tra i triangoli ABC e PQC;

b) il rapporto tra le aree di tali triangoli;

c) il rapporto tra le aree del trapezio ABPQ e del triangolo ABC.

65.Considera l'altezza CH del triangolo ABC. Per quale punto P di CH puoi condurre una retta parallela al lato AB in modo che il triangolo sia diviso in due parti equivalenti?

$[CP=\frac{\sqrt{2}}{2}CH]$

66.La piantina di un appartamento è disegnata in scala $\frac{1}{200}$ . Se l'area dell'appartamento misurata sulla piantina risulta di $42\,cm^2$ , qual è l'area reale dell'appartamento? $[168\,m^2]$

67.Dato il triangolo equilatero ABC, traccia l'altezza BD e costruisci il triangolo equilatero BDE. Dimostra che $BE\perp AB$ e $CE\|AB$ . Determina il rapporto di similitudine tra i triangoli equilateri BDE e ABC e il rapporto tra le loro aree. $k=\frac{\sqrt{3}}{2};k^2=\frac{3}{4}$

68.Le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli aventi lo stesso vertice. Dimostra che due di essi sono simili, e gli altri due sono *equivalenti* (cioè hanno la stessa area).

69.Dati due triangoli simili, dimostra che il rapporto tra le mediane corrispondenti e tra le bisettrici corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine.

70.Dimostra che un quadrilatero inscritto in una circonferenza è diviso dalle diagonali in quattro triangoli a due a due simili tra loro.

71.Dimostra che in un triangolo le altezze sono inversamente proporzionali alle basi corrispondenti.

72.Dato un triangolo ABC, costruisci un triangolo PQR i cui lati siano rispettivamente paralleli ai lati di ABC. Dimostra che i sue triangoli sono simili. Quanto vale il rapporto di similitudine?

73.Dimostra che, se in un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo, allora essa divide il trapezio in due triangoli simili.

74.Data una circonferenza di diametro AB, traccia per un suo punto T la retta *t* ad essa tangente ed indica con H la proiezione ortogonale di A sulla *t*. Dimostra che i triangoli ABT e AHT sono simili.

75.Il triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è inscritto in una circonferenza. Il diametro CD interseca la base del triangolo nel punto E. Dimostra che i triangoli AEC, ADE, ADC sono tutti simili tra loro.

76.Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, considera il quadrato DEFG inscritto nel triangolo ed avente il lato DE appartenente all'ipotenusa ed i vertici F e G sui cateti BC e AC rispettivamente. Dimostra che i triangoli ABC, ADG, EBF, GFC sono tutti simili tra loro.

77. Data la semicirconferenza di diametro AB, nel semipiano di origine AB che la contiene conduci la semiretta t ad essa tangente in B. Traccia la corda AP ed indica con Q il punto in cui il suo prolungamento incontra la tangente t. Dimostra che i triangoli APB, ABQ, BHP, PHQ, BPQ sono tutti simili.

78. Un punto P è interno al triangolo equilatero ABC. Dimostra che la somma delle distanze di P dai lati del triangolo è costante (non cambia al variare di P) ed è uguale all'altezza del triangolo. (Uguaglia l'area di ABC alla somma delle aree dei triangoli PAB, PBC, PAC)

79. Nel trapezio ABCD di basi AB e CD, i prolungamenti dei lati obliqui si intersecano in P. Dimostra che le distanze del punto P dalle basi sono proporzionali alle basi stesse.